数据结构与算法（十一）

张铭 主讲

采用教材：张铭，王腾蛟，赵海燕 编写
高等教育出版社，2008. 6（“十一五”国家级规划教材）

http://www.jpk.pku.edu.cn/pkujpk/course/sjjg

主要内容

- 基本概念
- 11.1 线性索引
- 11.2 静态索引
- 11.3 倒排索引
- 11.4 动态索引
  - 11.4.1 B 树
  - 11.4.2 B 树的性能分析
  - 11.4.3 B^+ 树
  - 11.4.4 B 树、B^+ 树索引性能的比较
- 11.5 位索引技术
- 11.6 红黑树

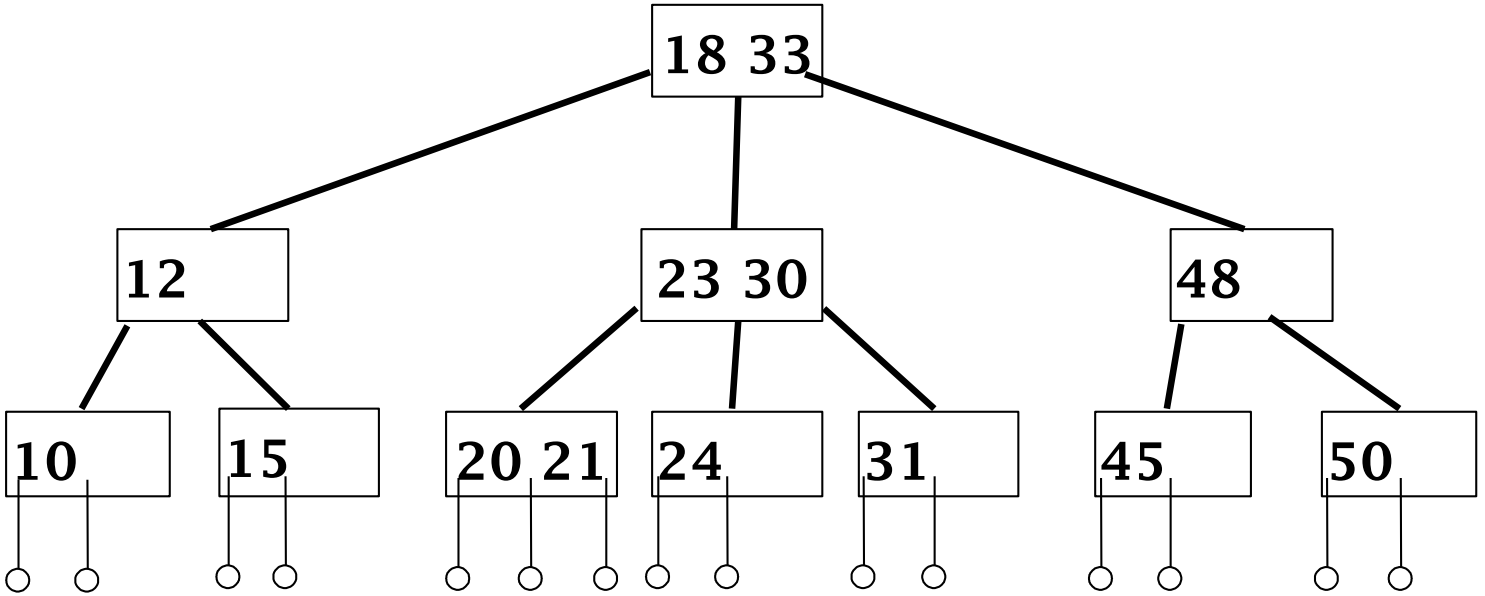
基本概念

- 动态索引结构
  - 索引结构本身也可能发生改变
  - 在系统运行过程中插入或删除记录时
- 目的
  - 保持较好的性能
    - 例如较高的 检索 效率

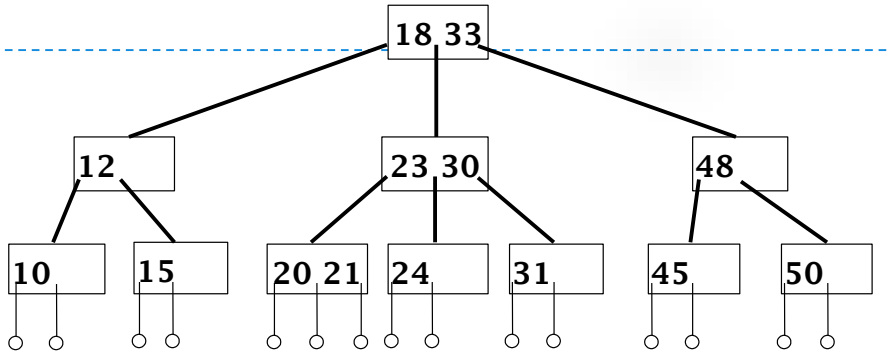
11.4.1 B 树

- 一种平衡的多分树 (Balanced Tree)

3 阶 B 树　2-3 树



m 阶 B 树的结构定义



(1) 每个结点至多有 m 个子结点

(2) 除根结点和叶结点外，其它每个结点至少有$\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$个子结点

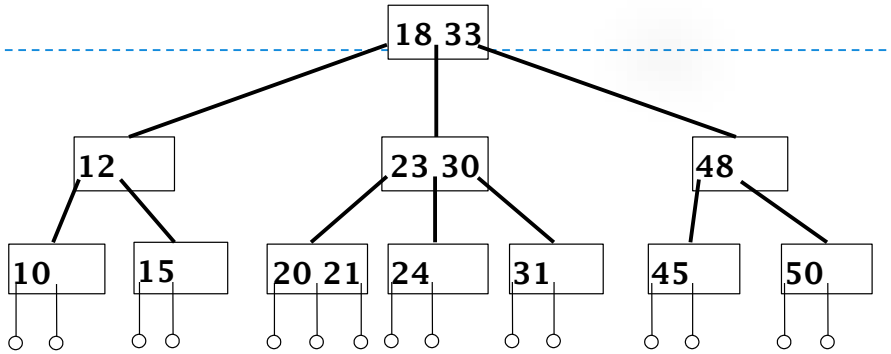
(3) 根结点至少有两个子结点

- 唯一例外的是根结点就是叶结点时没有子结点
- 此时 B 树只包含一个结点

(4) 所有的叶结点在同一层

(5) 有 k 个子结点的非根结点恰好包含 k-1 个关键码

B 树的性质



(1) 树高平衡，所有叶结点都在同一层

(2) 关键码没有重复，父结点中的关键码是其子结点的分界

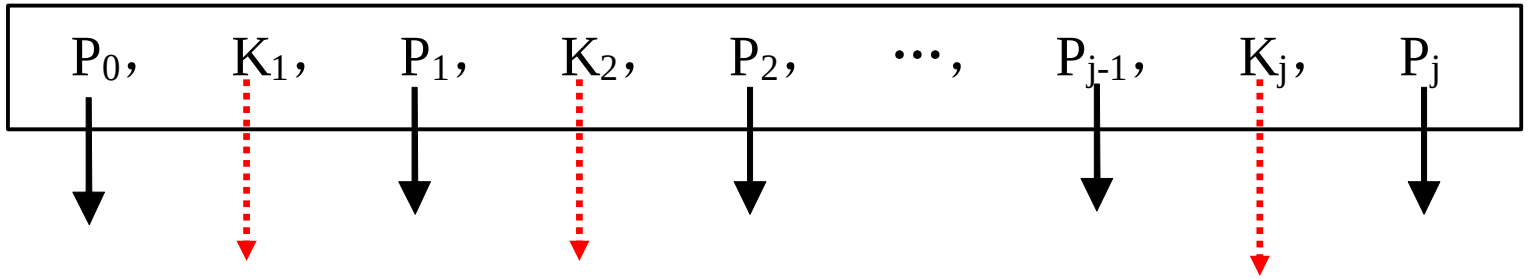
(3) B 树把（值接近）相关记录放在同一个磁盘页中，从而利用了访问局部性原理

(4) B 树保证树中至少有一定比例的结点是满的

- 这样能够改进空间的利用率
- 减少检索和更新操作的磁盘读取数目

B 树的结点结构

B 树的一个包含 j 个关键码，j+1 个指针的结点的一般形式为：

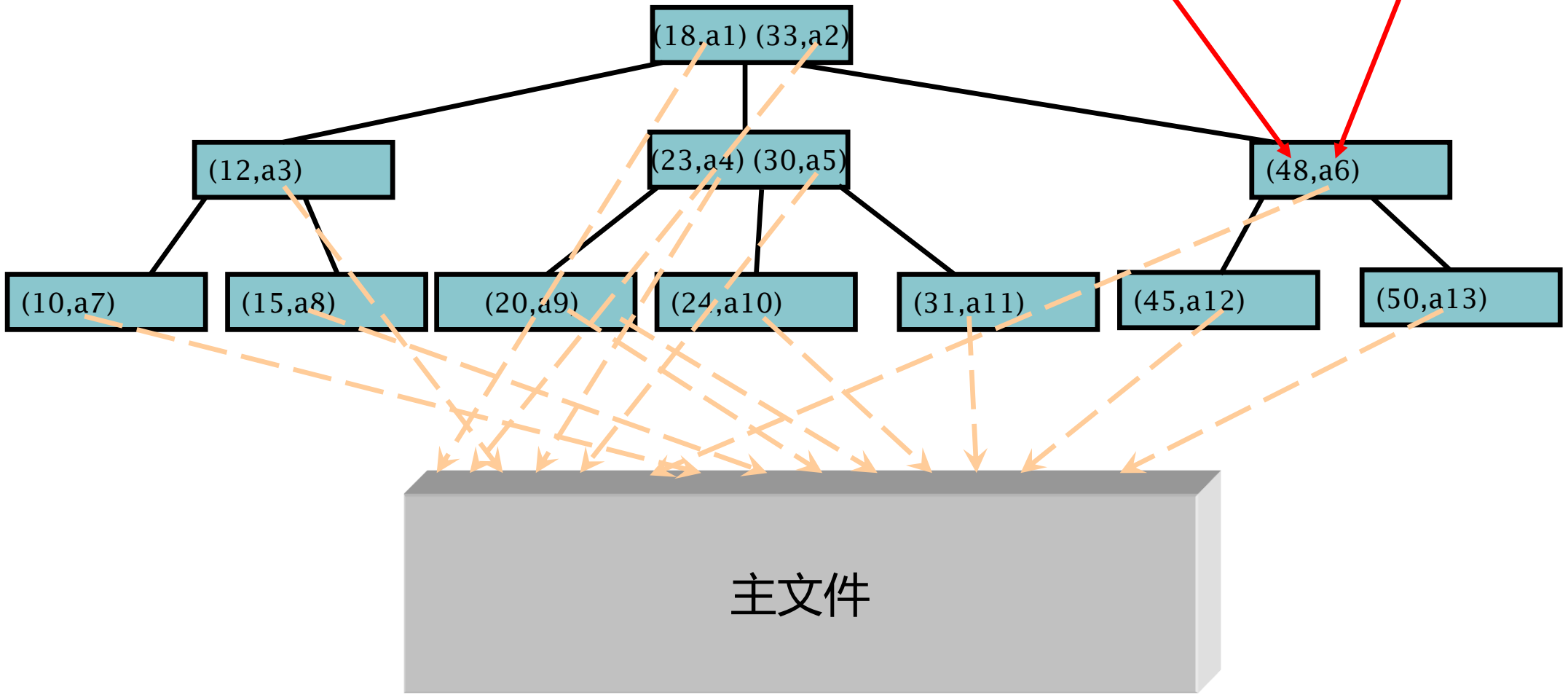


- 其中 K_i 是关键码值，$K_1<K_2<\ldots<K_j$，
- P_i 是指向包括 K_i 到 K_{i+1} 之间的关键码的子树的指针。
- 还有指针吗？

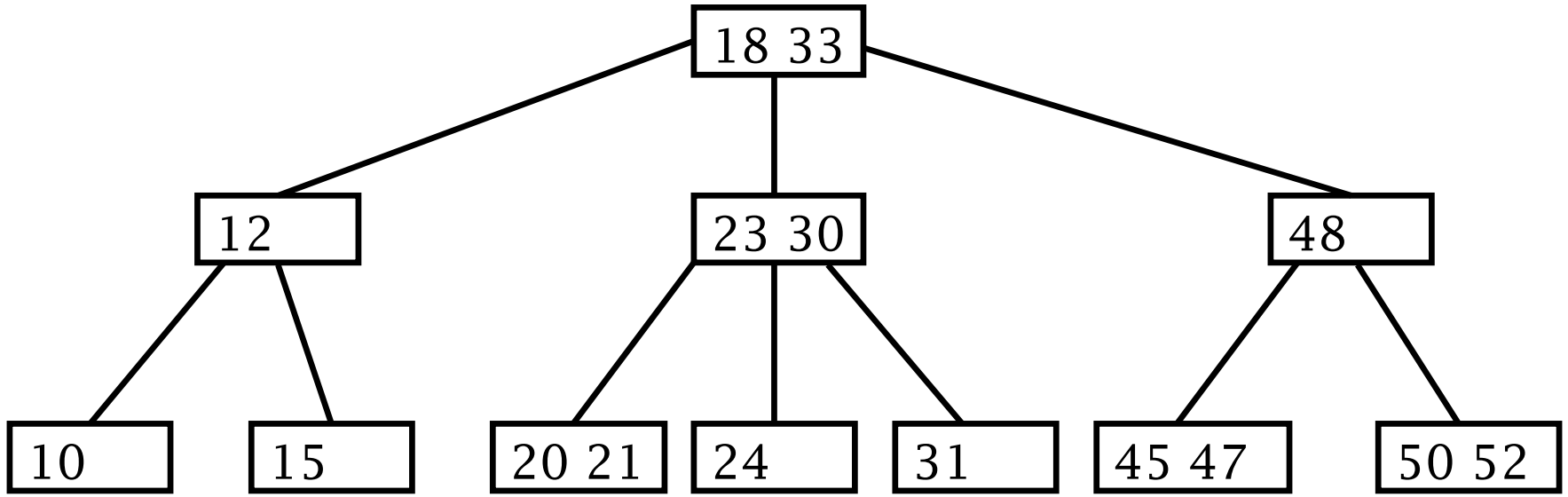
11.4.1 B 树

B 树隐含指针

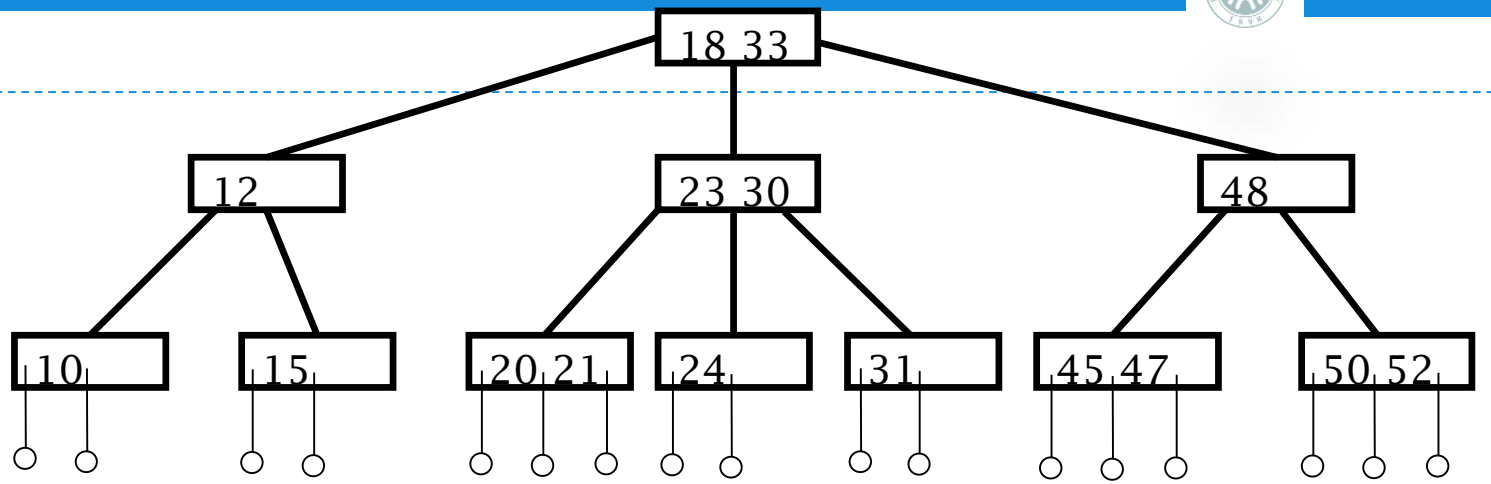
（关键码，文件页内地址）



2-3 树 = 3 阶 B 树（阶应该 ≥ 3）



B 树的查找



- 交替的两步过程
  - 1. 把根结点读出来，在根结点所包含的关键码 K_1，…，K_j 中查找给定的关键码值
    - 找到则检索成功
  - 2. 否则，确定要查的关键码值是在某个K_i和 K_{i+1} 之间，于是取 p_i 所指向的结点继续查找
- 如果 p_i 指向外部空结点，表示检索失败

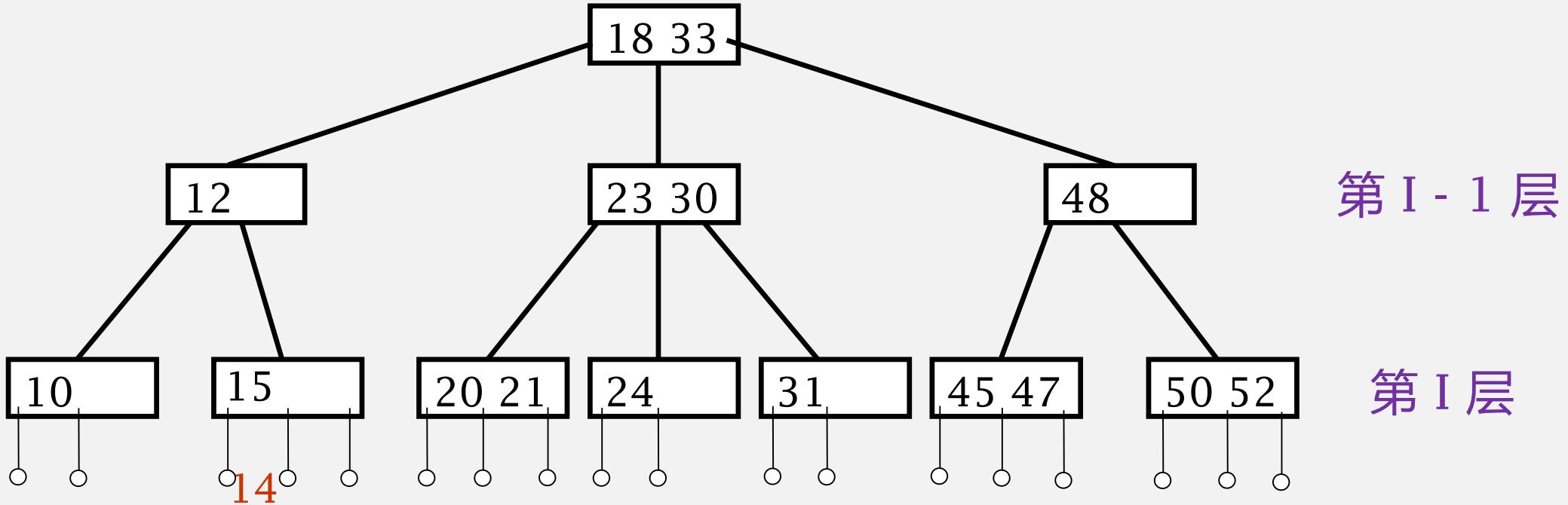
B 树插入

- 注意保持性质，特别是等高和阶的限制
  - 1) 找到最底层，插入
  - 2) 若溢出，则结点分裂，中间关键码连同新指针插入父结点
  - 3) 若父结点也溢出，则继续 分裂
    - 分裂过程可能传达到根结点(则树升高一层)

B 树的插入

- 外部空结点（即失败检索）处在第 I 层的 B 树，插入的关键码总是在第 I-1 层

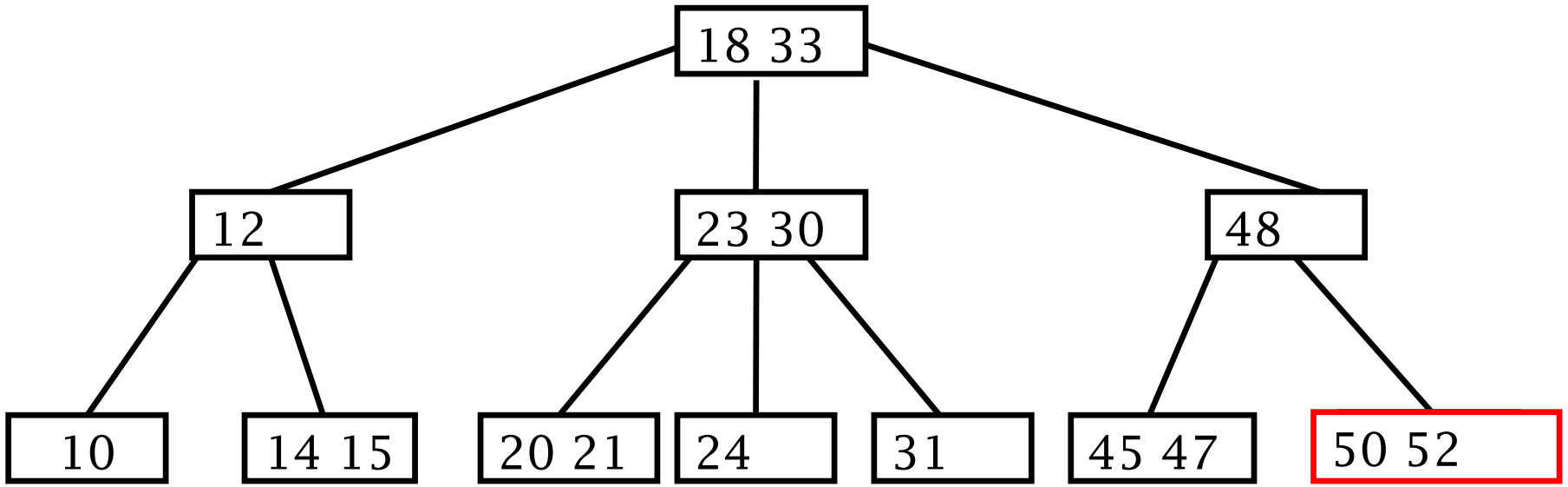
3阶B树 插入14



第 I - 1 层

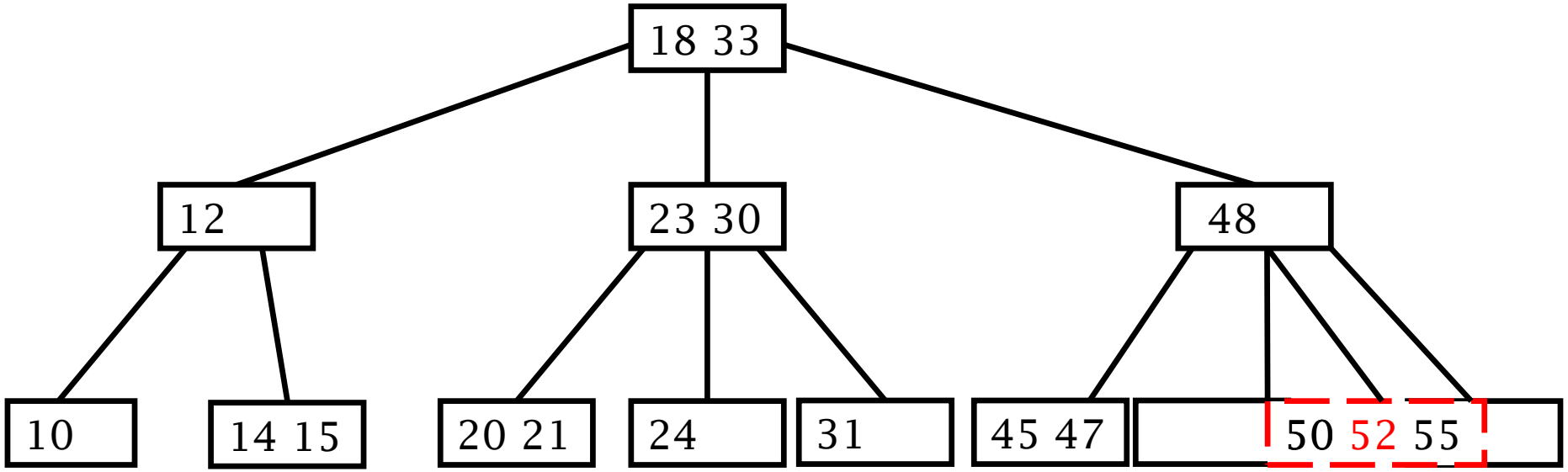
第 I 层

m=3，插入 55

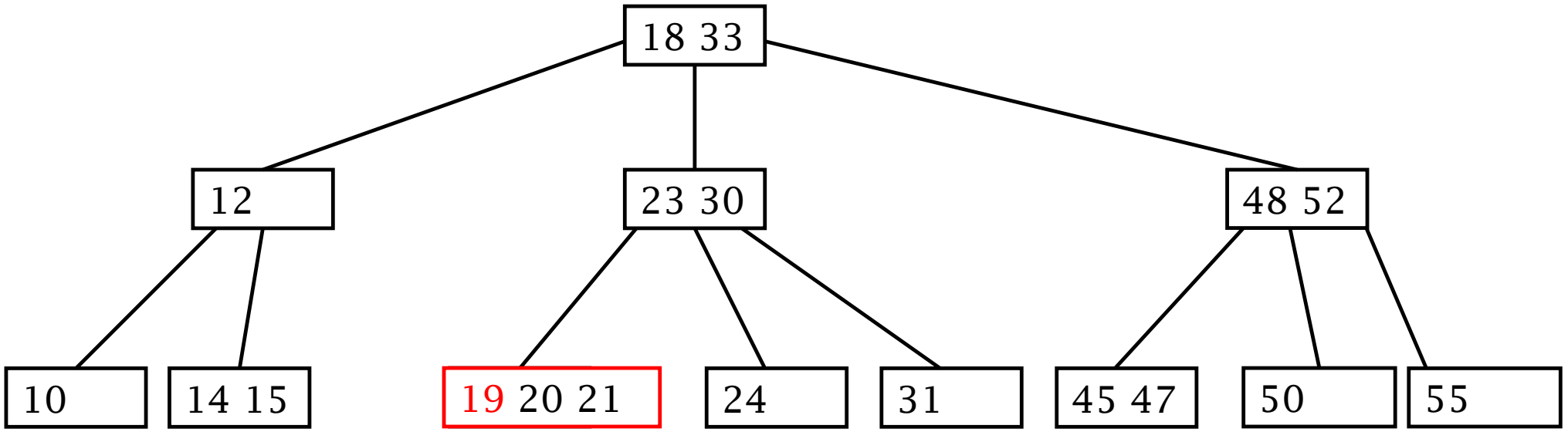


55

m=3，叶结点分裂，把 52 提升到父结点

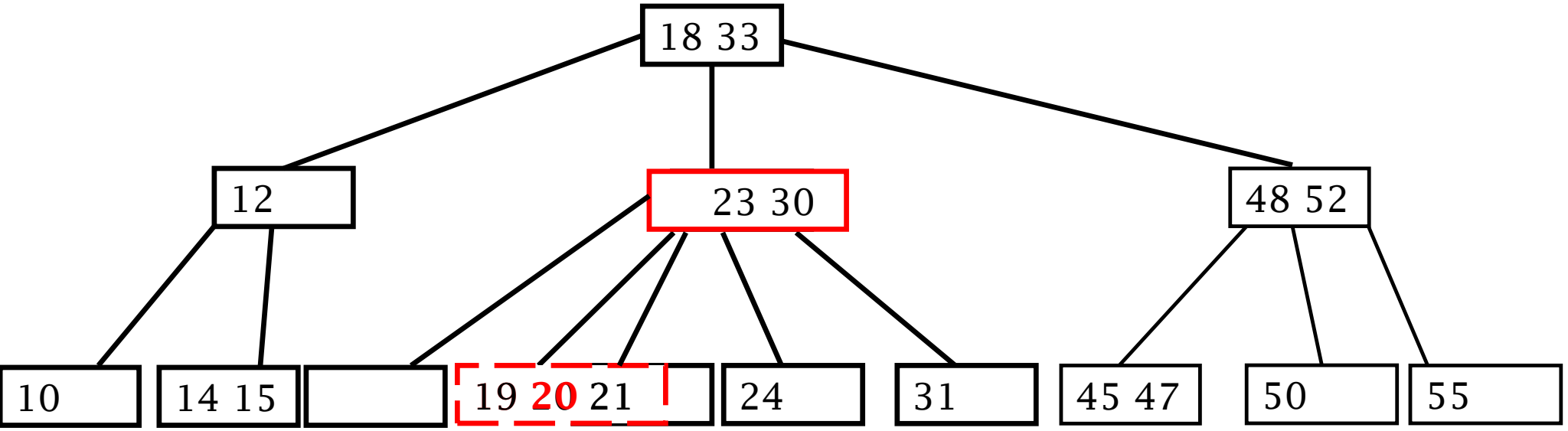


插入 19, 引起 3 阶 B 树根结点分裂

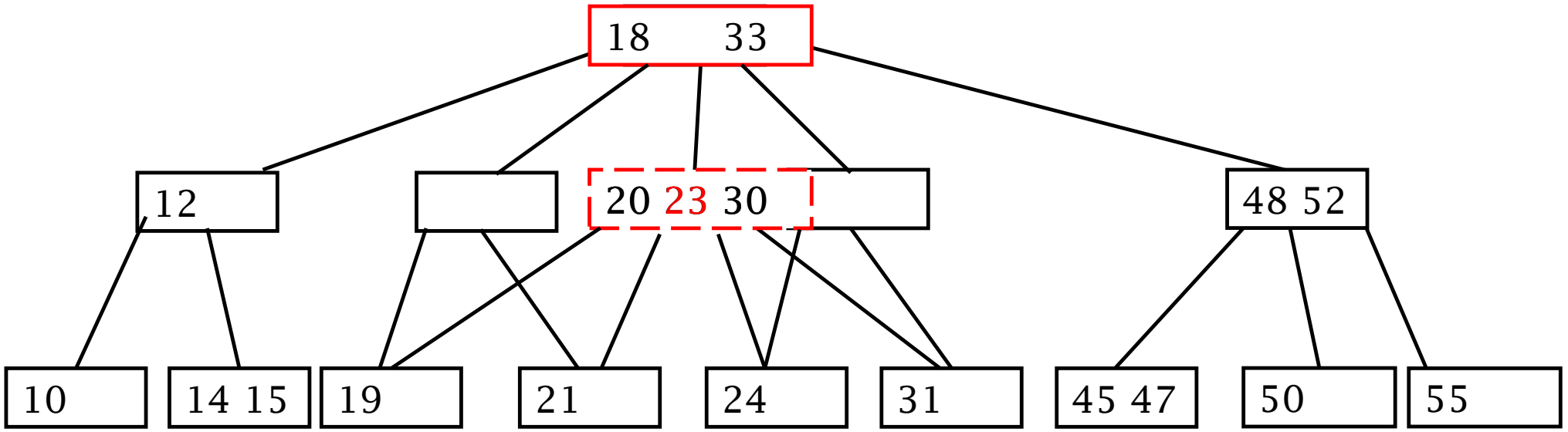


19

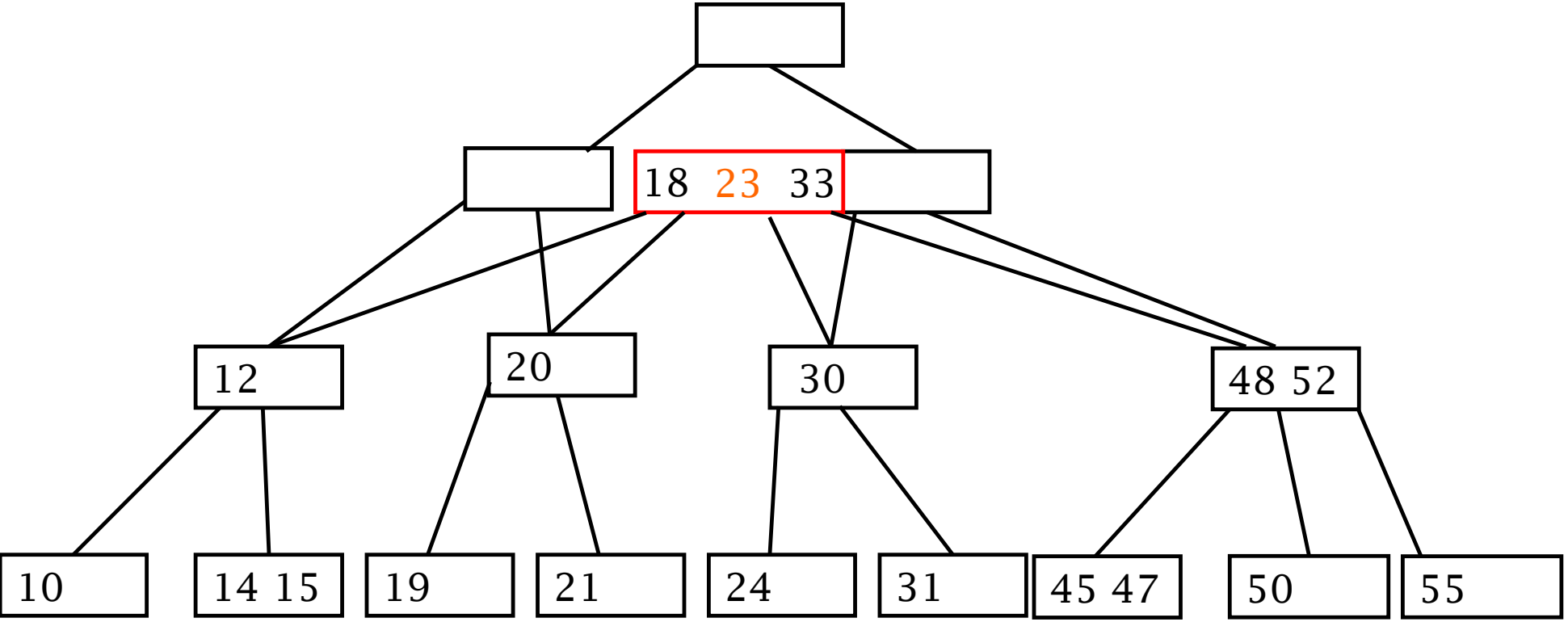
m=3，叶结点分裂



m=3，第二层结点分裂

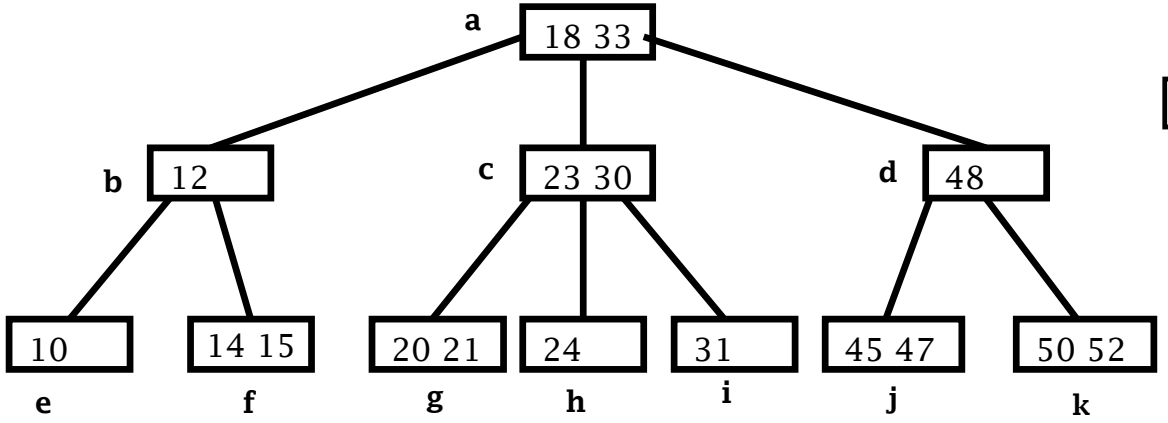


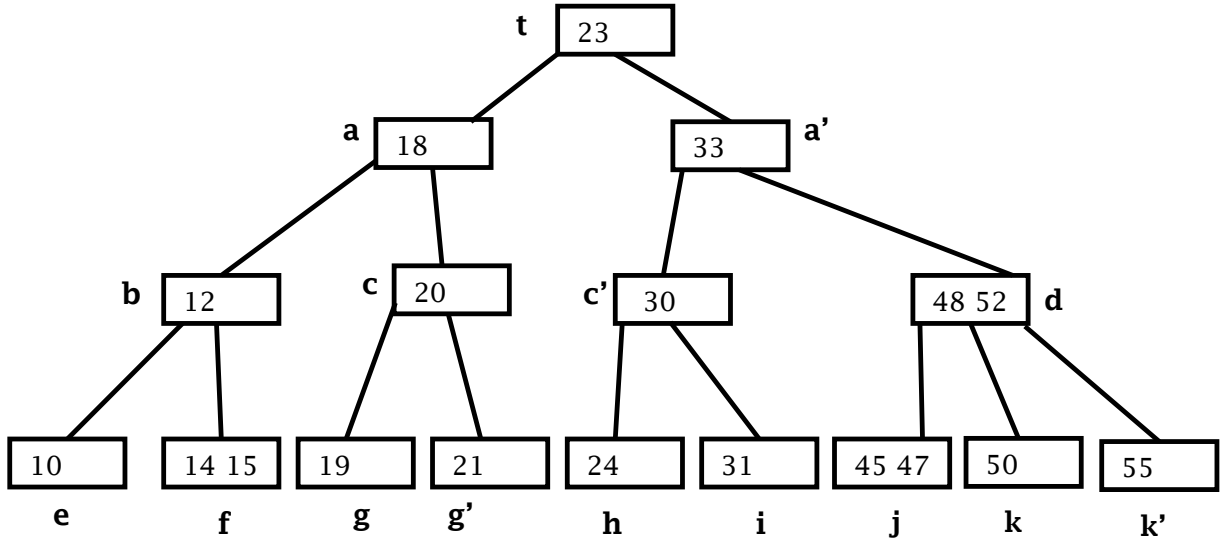
m=3，根结点分裂



B 树操作的访外次数

- 连续插入14、55、19，假设访问过的都缓存
- 读盘7次 (a,b,f; d,k; c,g)
- 写盘11次 (f; k,k',d; g,g',c,c',a,a',t)

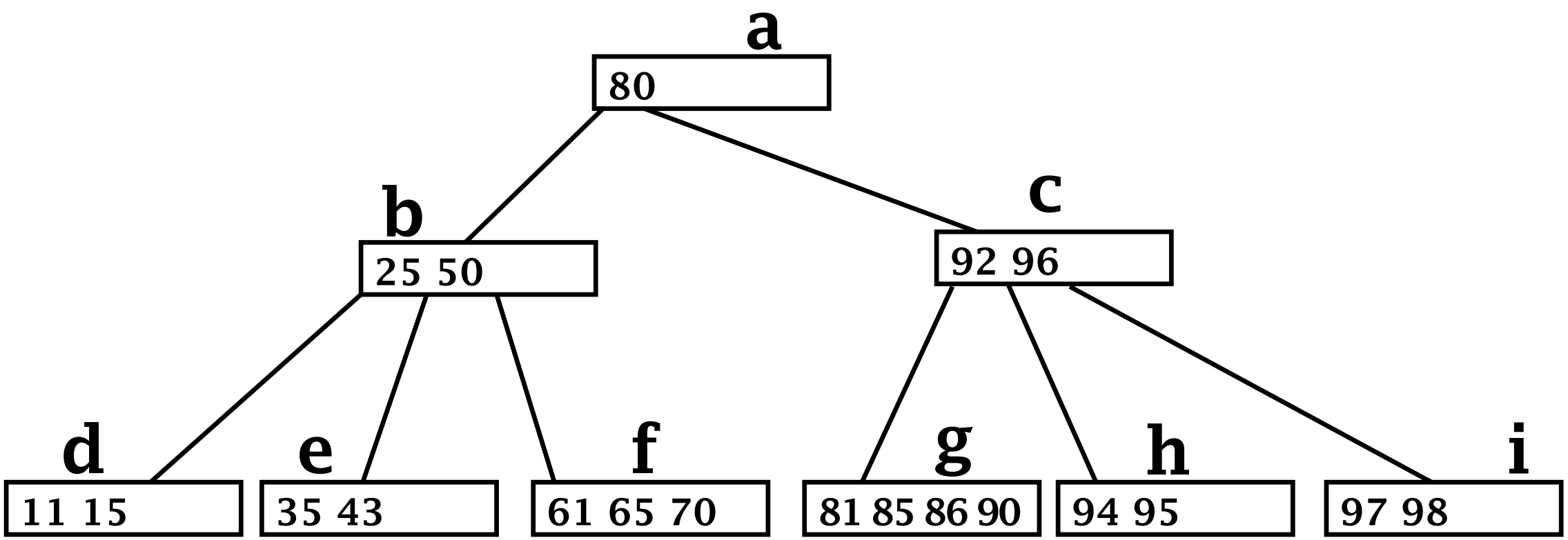




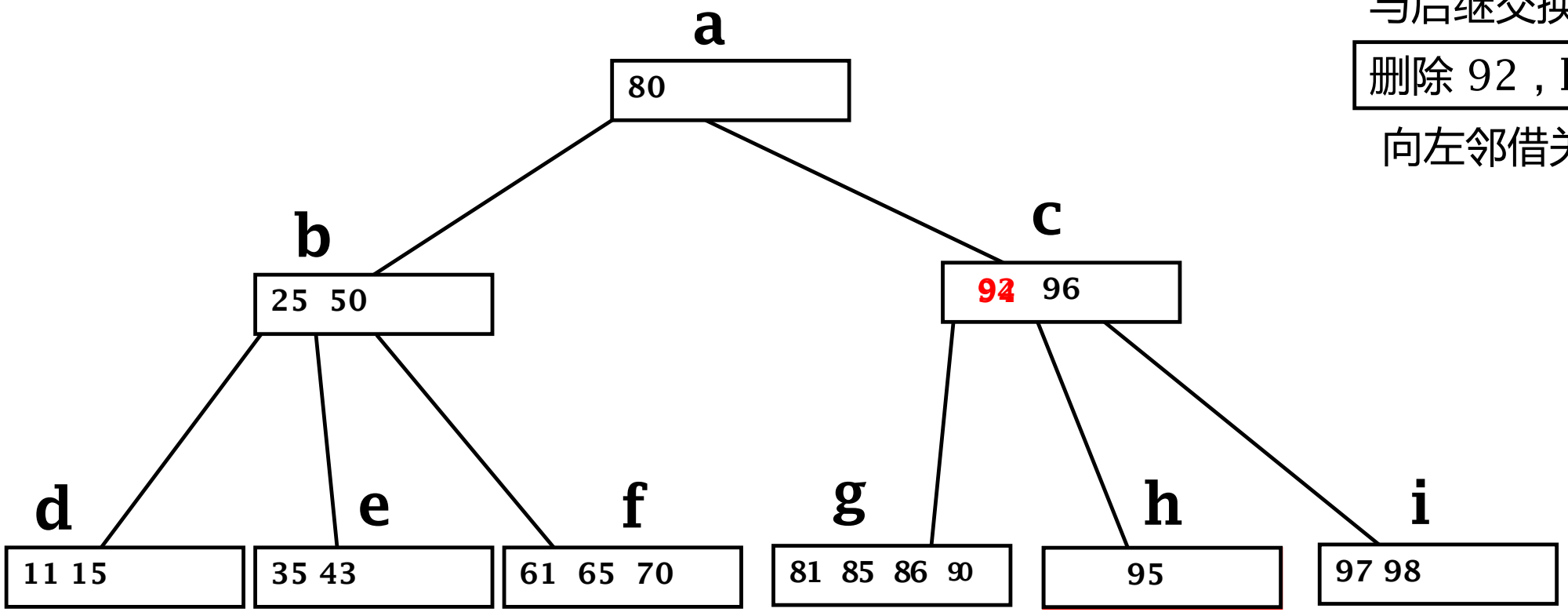
B 树的删除

- 删除的关键码不在叶结点层，跟叶中后继对换
- 删除的关键码在叶结点层
  - 删除后关键码个数不小于 $\lceil m/2 \rceil - 1$，直接 删除
  - 关键码个数小于 $\lceil m/2 \rceil - 1$
    - 如果兄弟结点关键码个数不等于 $\lceil m/2 \rceil - 1$
      - 从兄弟结点移若干个关键码到该结点中来(父结点中的一个关键码要做相应变化)
    - 如果兄弟结点关键码个数等于 $\lceil m/2 \rceil - 1$
      - 合并

5 阶 B 树删除示例



5 阶 B 树删除示例



与后继交换

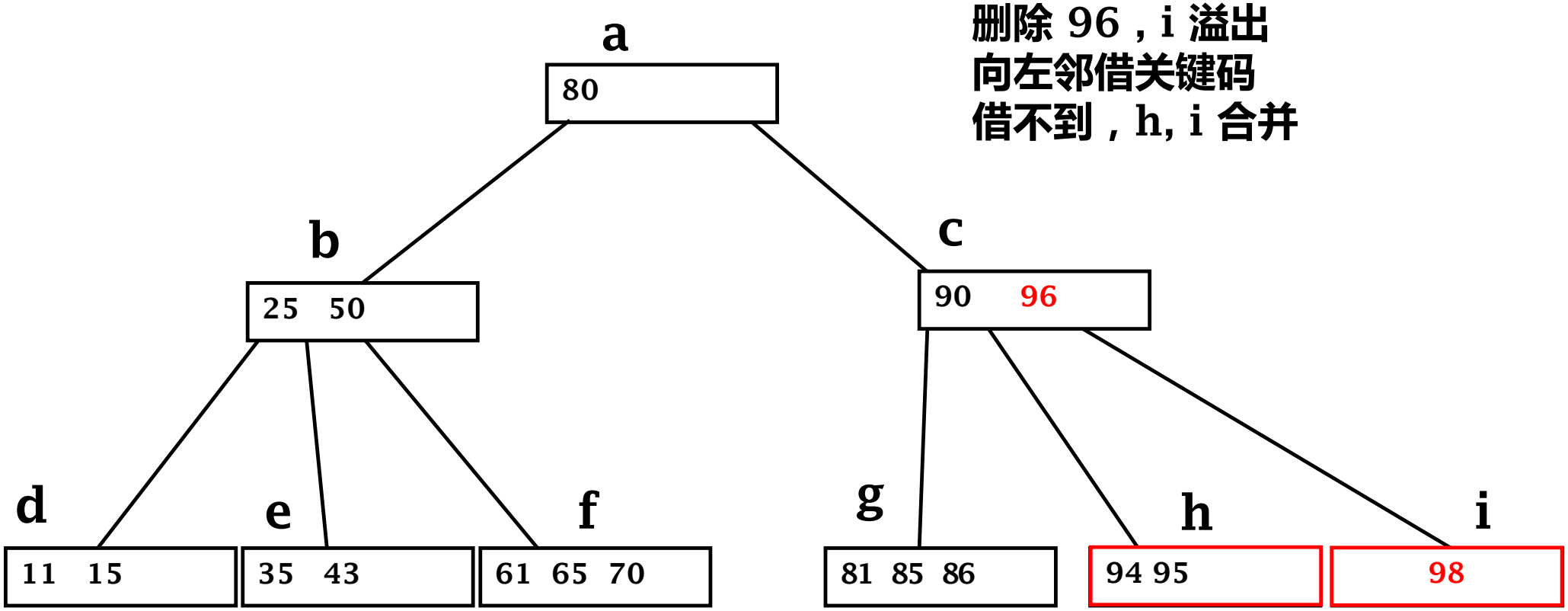
删除 92，h 溢出

向左邻借关键码

删除92，先与后继交换，删后下溢出，向左邻借关键码

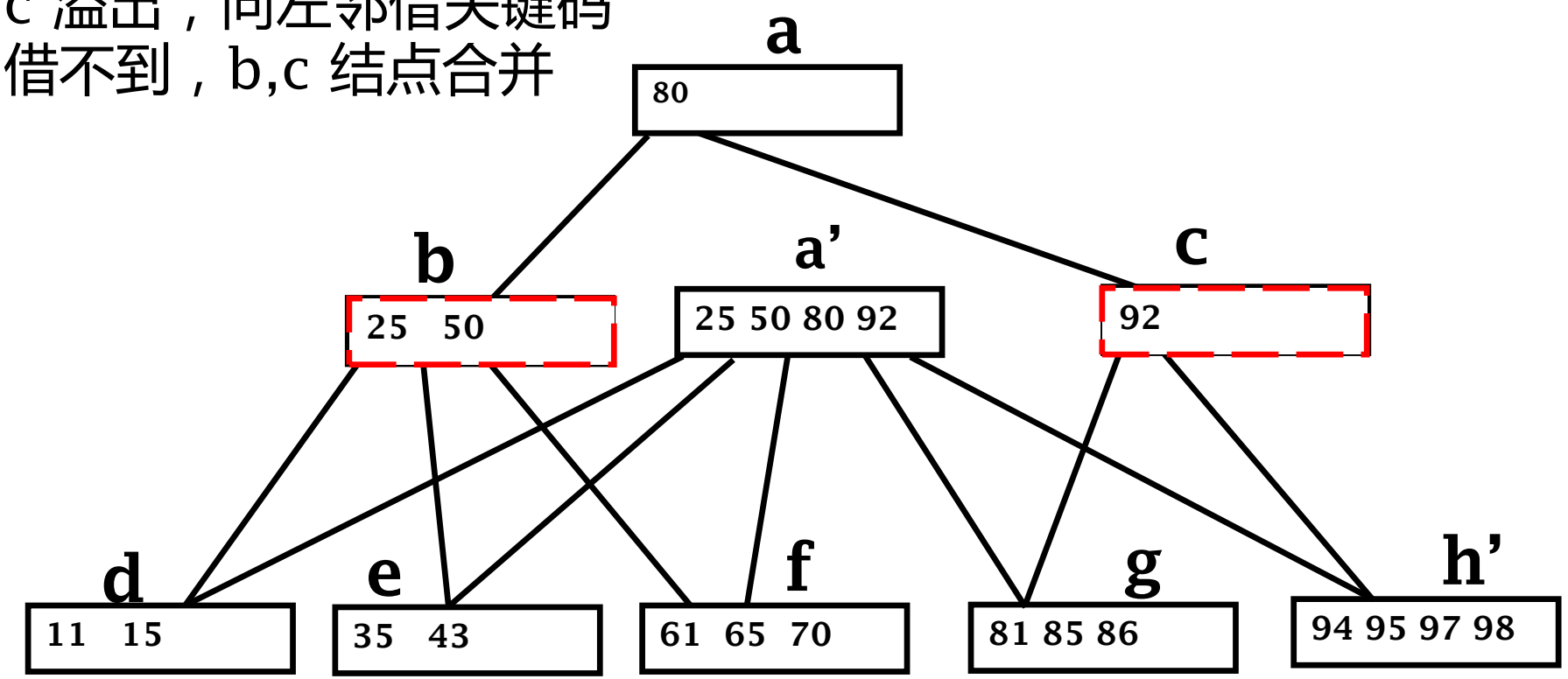
5 阶 B 树删除示例

继续删除 96
与后继交换
删除 96，i 溢出
向左邻借关键码
借不到，h, i 合并

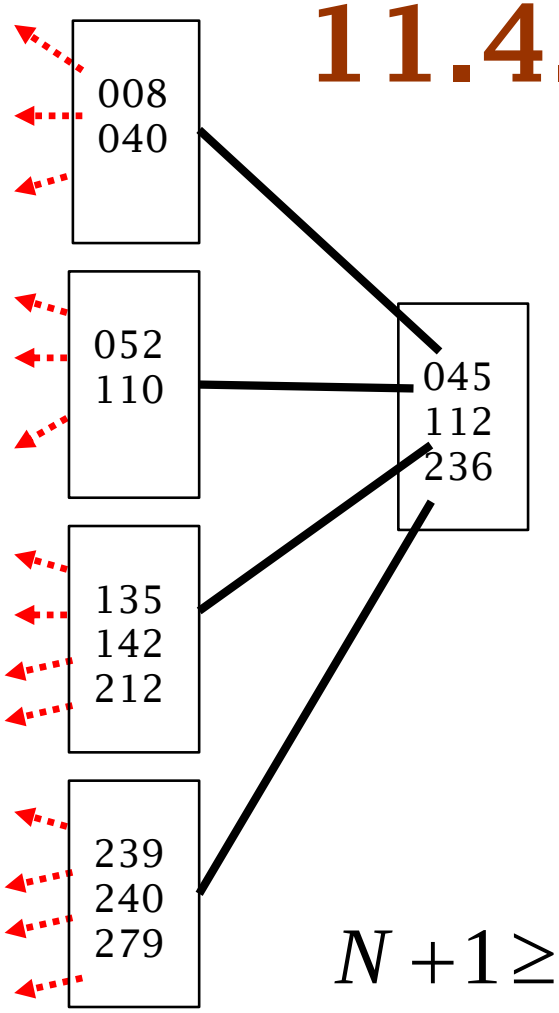


5 阶 B 树删除示例

h, i 合并成为 h’
c 溢出，向左邻借关键码
借不到，b,c 结点合并



11.4.2 B 树的性能分析



- 包含 N 个关键码的 B 树
  - 有 N+1 个外部空指针
  - 假设外部指针在第 k 层
- 各层的结点数目
  - 第 0 层为根，第一层至少两个结点，
  - 第二层至少 $2 \cdot \lceil \frac{m}{2} \rceil$ 个结点，
  - 第 k 层至少 $2 \cdot \lceil \frac{m}{2} \rceil^{k-1}$ 个结点，

$$N+1 \geq 2 \cdot \lceil m/2 \rceil^{k-1}, \; k \leq 1+\log_{\lceil m/2 \rceil}(\frac{N+1}{2})$$

示例

- N=1,999,998，m=199 时

$$k \le 1+\log_{\lceil m/2 \rceil}(\frac{N+1}{2})$$

  - k=4
  - 一次检索最多 4 层

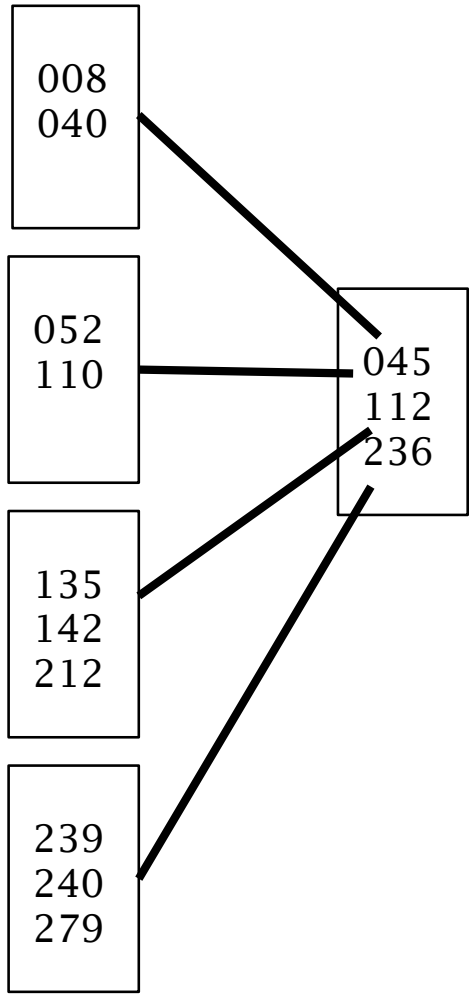
结点分裂次数

- 设关键码数为 N (空指针 N+1)，内部结点数为 p

  即 $N \geq 1+(\lceil m/2 \rceil -1)(p-1)$

- 最差情况下每插入一个结点都经过分裂(除第一个)，即 p-1 个结点都是分裂而来的，则每插入一个关键码平均分裂结点个数为 $p-1 \leq \frac{N-1}{\lceil m/2 \rceil -1}$

$$s=\frac{p-1}{N} \leq \frac{N-1}{(\lceil m/2 \rceil -1)\cdot N} \leq \frac{1}{\lceil m/2 \rceil -1}$$



思考

- 1. 是否存在符合定义的 2 阶 B 树？是否有实用价值？为什么？
- 2. B 树删除时使用先借用再合并的方法，为何在插入的时候不使用先送给兄弟结点再考虑分裂的方法？
- 3. B 树的定义中关于度数的定义为从$\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$到$m$之间，是否可以调整为其他范围？

数据结构与算法

谢谢聆听

国家精品课“数据结构与算法”
http://www.jpk.pku.edu.cn/pkujpk/course/sjjg/

张铭，王腾蛟，赵海燕
高等教育出版社，2008. 6。“十一五”国家级规划教材