数据结构与算法（十一）

张铭 主讲

采用教材：张铭，王腾蛟，赵海燕 编写
高等教育出版社，2008. 6（“十一五”国家级规划教材）

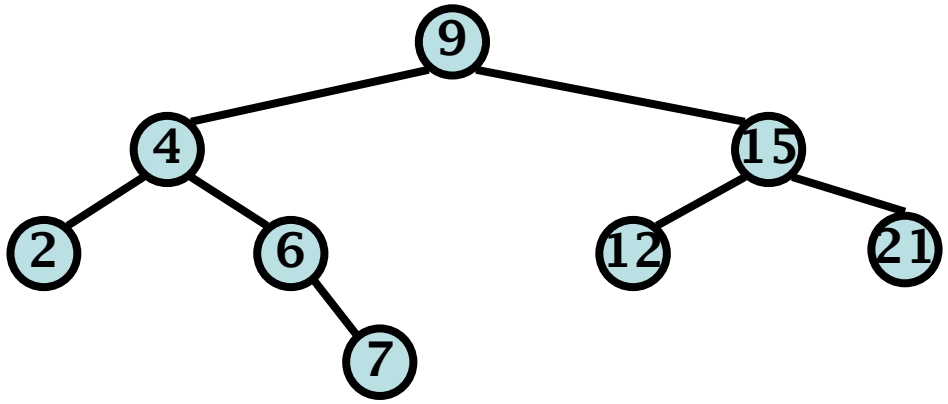
http://www.jpk.pku.edu.cn/pkujpk/course/sjjg

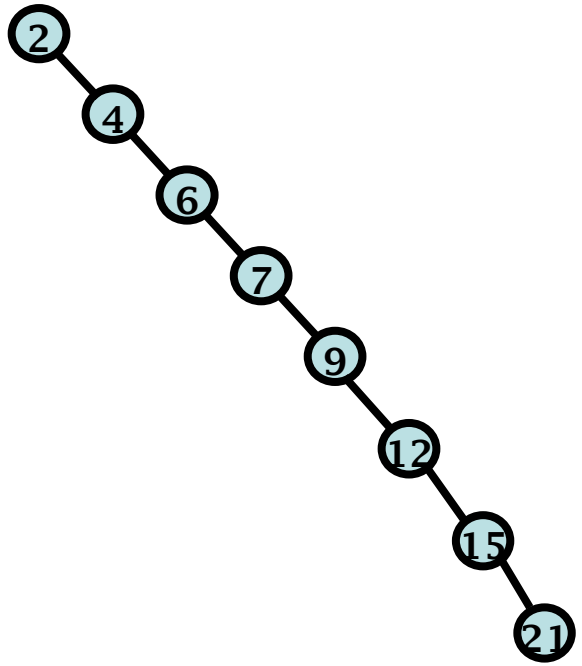
主要内容

- 基本概念
- 11.1 线性索引
- 11.2 静态索引
- 11.3 倒排索引
- 11.4 动态索引
- 11.5 位索引技术
- 11.6 红黑树

BST的平衡问题

- 理想状况：插入、删除、查找时间代价为O($\log n$)
- 输入9,4,2,6,7,15,12,21
- 输入2,4, 6,7, 9, 12,15, 21





11.6 红黑树

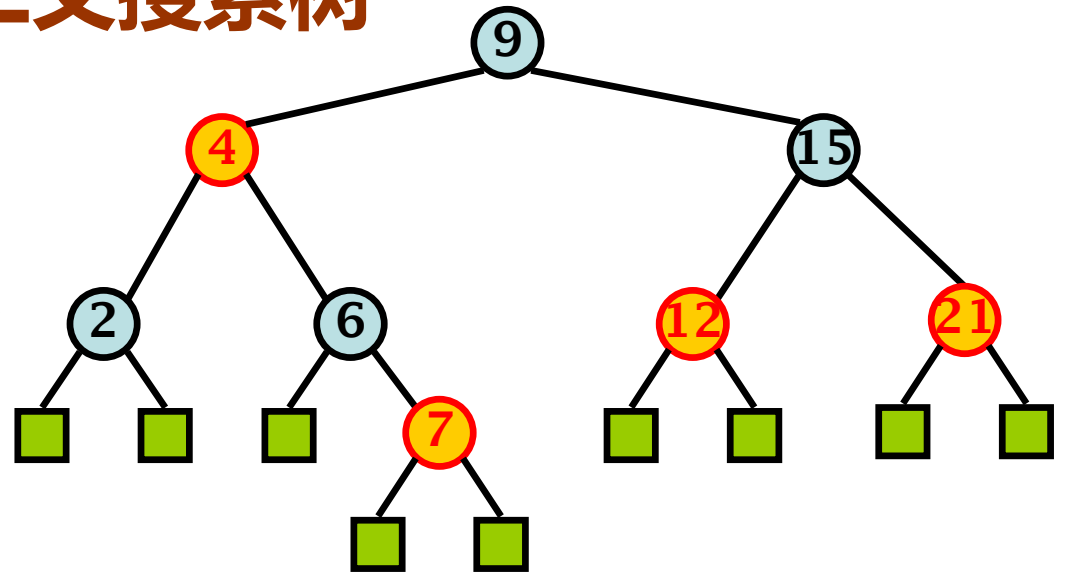
- 11.6.1 红黑树定义：

  red-black tree, 简称RB-tree

- 11.6.2 红黑树相关性质
- 11.6.3 结点插入算法
- 11.6.4 结点删除算法

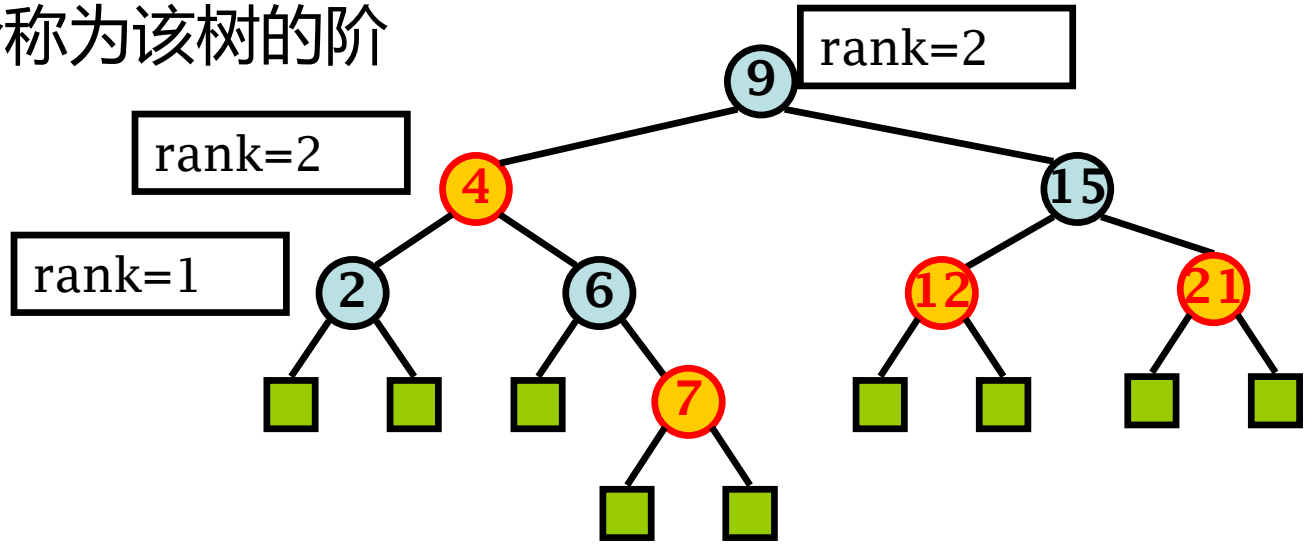
红黑树：平衡的 扩充 二叉搜索树

- 颜色特征：结点是“红色” 或“黑色”；
- 根特征 ：根结点永远是“黑色”的；
- 外部特征：扩充外部叶结点都是空的“黑色”结点；
- 内部特征：“红色”结点的两个子结点都是“黑色”的，不允许两个连续的红色结点；
- 深度特征：任何结点到其子孙外部结点的每条简单路径都包含相同数目的“黑色”结点



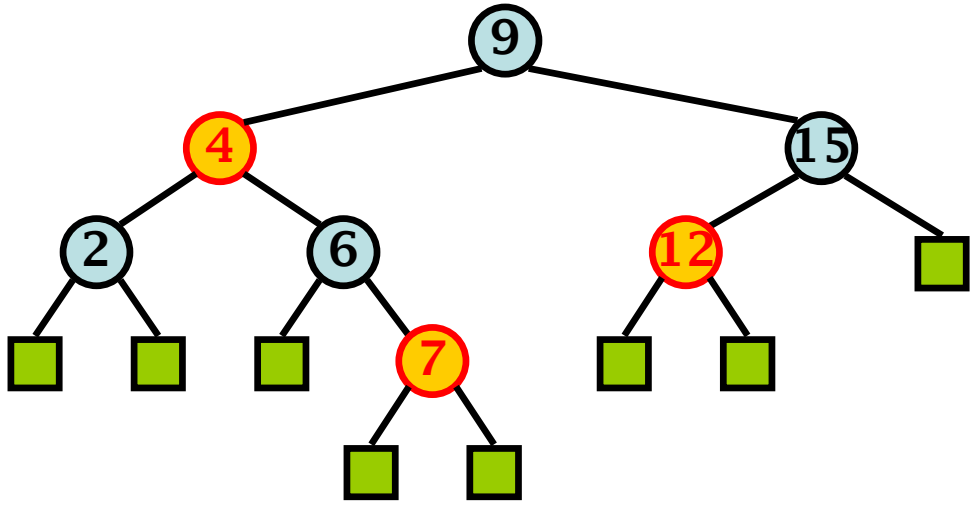
红黑树的阶

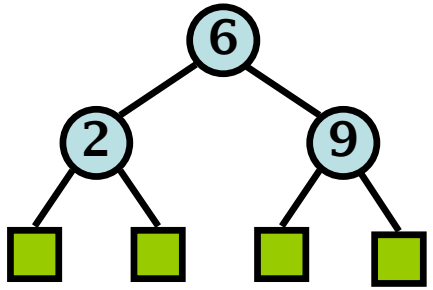
- 结点X的阶（rank，也称“黑色高度”）
  - 从该结点到外部结点的黑色结点数量
  - 不包括 X 结点本身，包括叶结点
- 外部结点的阶是零
- 根的阶称为该树的阶



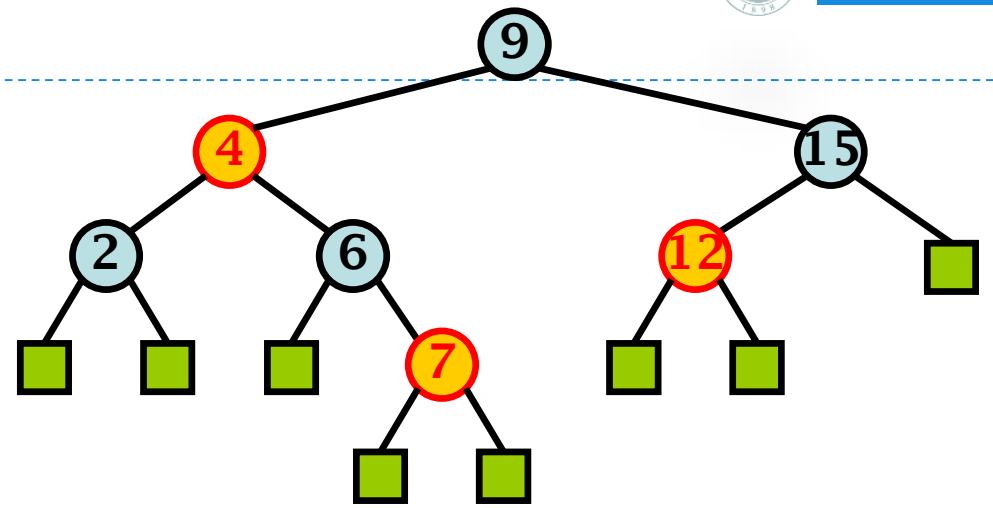
11.6.2 红黑树的性质

- (1) 红黑树是满二叉树　空叶结点也看作结点
- (2) 阶为 k 的红黑树路径长度 **最短是 k，最长是 2k**
  从根到叶的简单路径长度





红黑树的性质



- (2)' 阶为 k 的红黑树树高**最小是 k+1，最高是 2k+1**
- (3) 阶为k的红黑树的内部结点

  最少是一棵完全满二叉树，内部结点数最少是 2^k-1
- (4) n 个内部结点的红黑树树高

  最大是 $2\log_2(n+1)+1$
- 证明：

  设红黑树的阶为 k，设红黑树的树高是 h。

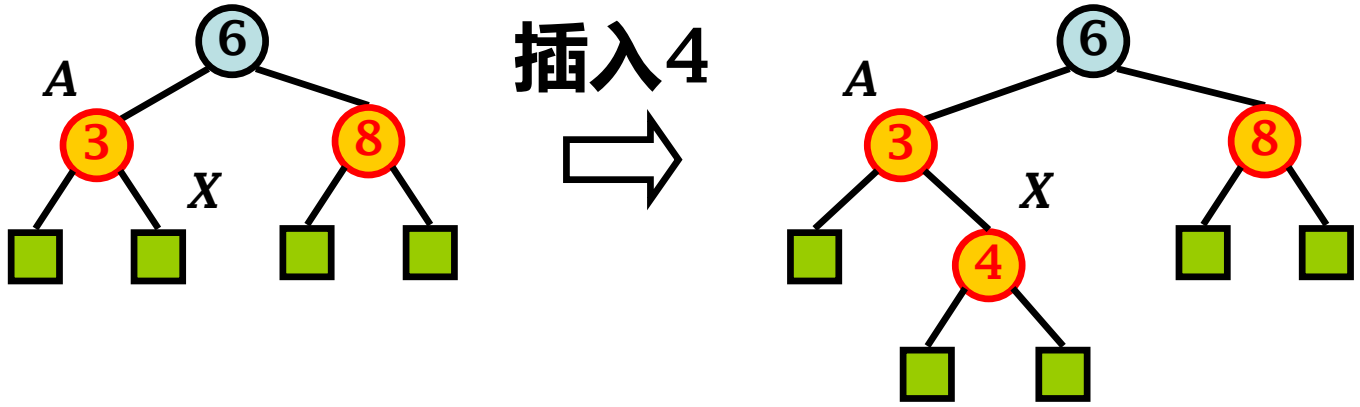
  由性质（2）' 得 h <= 2k+1，则 k >= (h-1) / 2

  由性质（3）得 $n >= 2^k - 1$, 即 $n >= 2^{(h-1)/2} - 1$

  可得出 $h <= 2\log_2(n+1)+1$

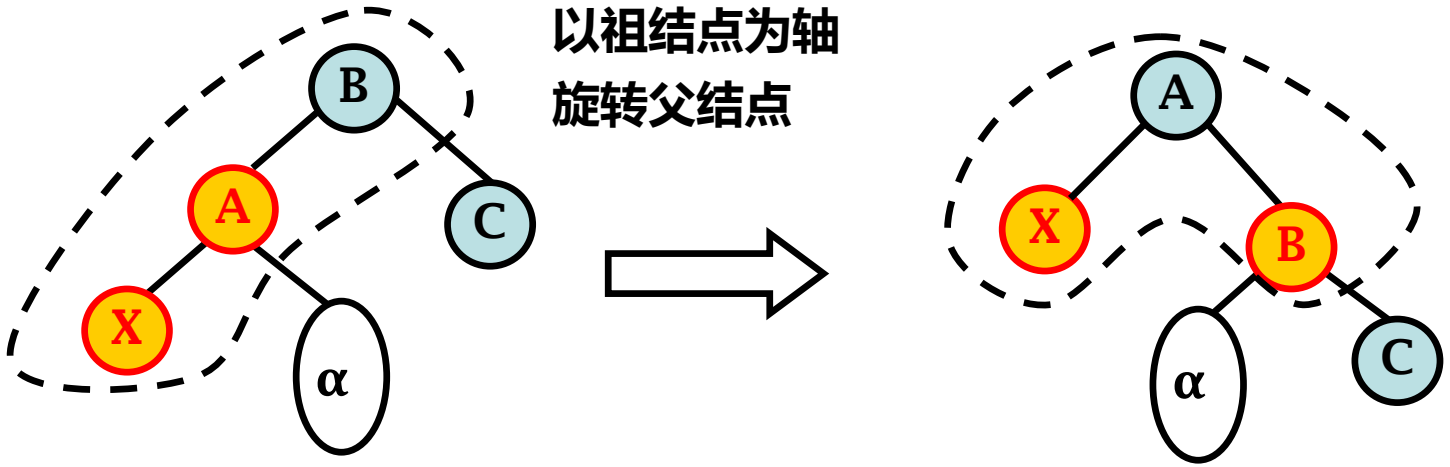
11.6.3 插入算法

- 先调用 BST 的插入算法
  - 把新记录着色为红色
  - 若父结点是黑色，则算法结束
- 否则，双红调整



插入算法调整 1：重构

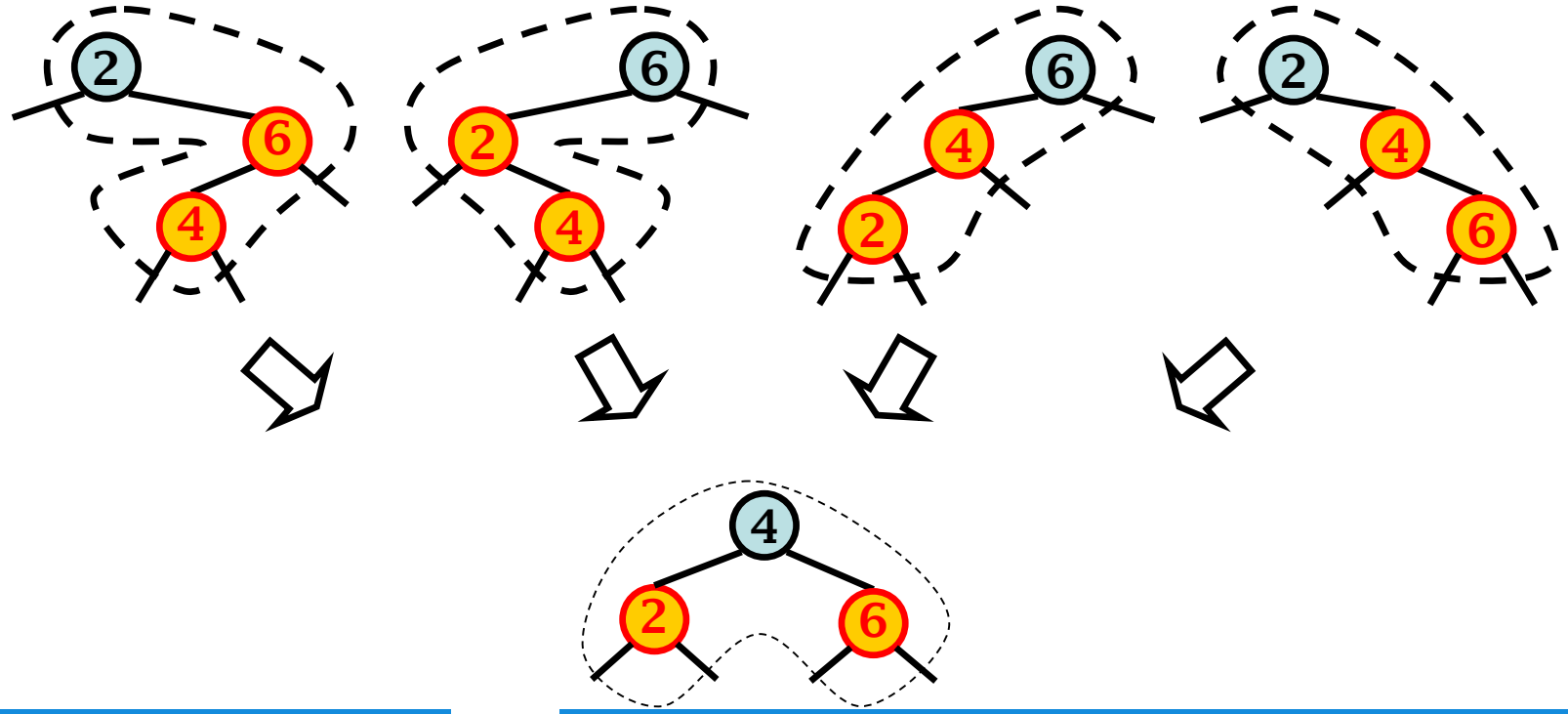
- 情况1：新增结点 X 的叔父结点是黑色



- 每个结点的阶都保持原值，调整完成

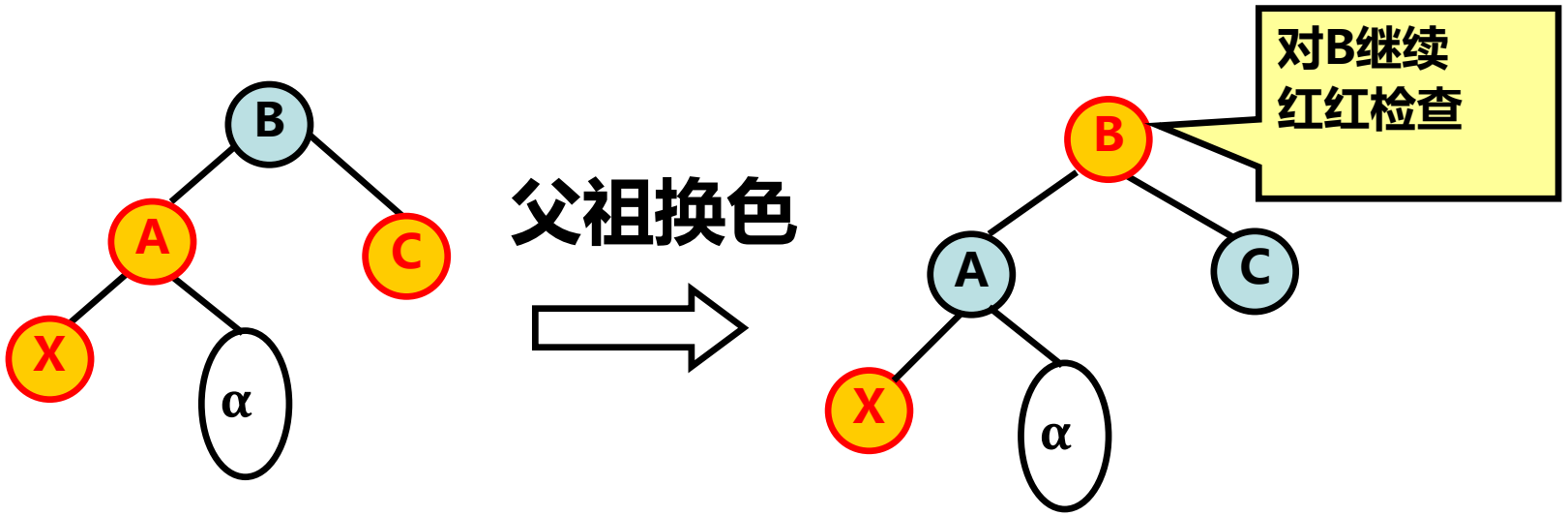
4 种形式的结构调整

- 原则：保持 BST 的中序性质



插入算法调整 2：换色

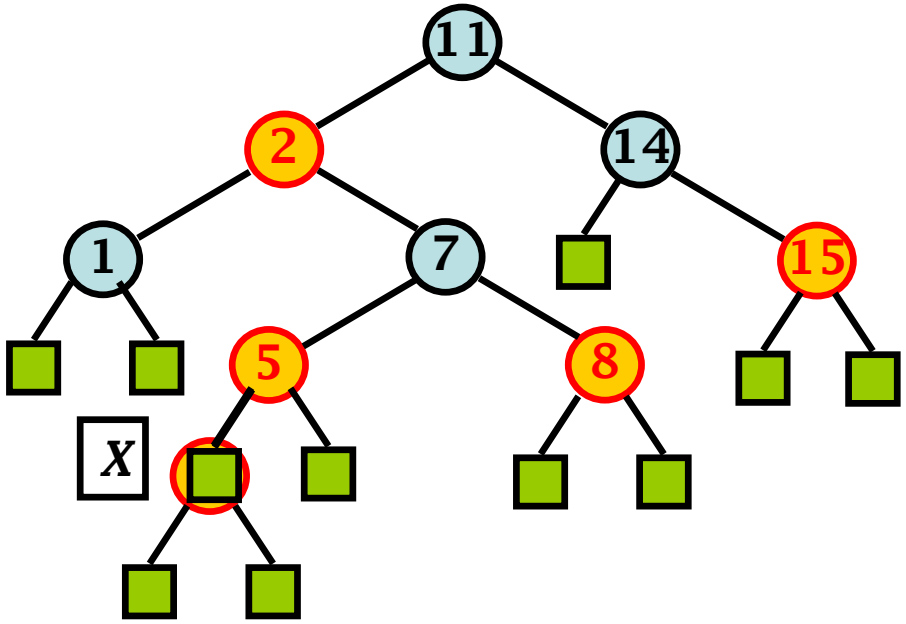
- 情况 2：新增结点 X 的叔父结点也是红色



- 需要继续检查平衡

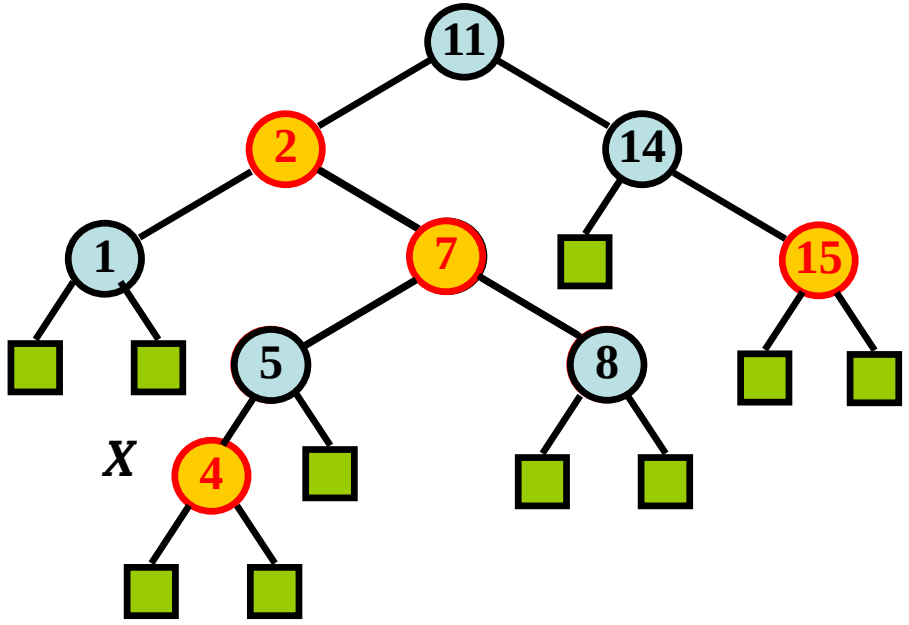
插入 4

- 情况 2 红红冲突
  - 父和叔父也是红
- 父祖换色



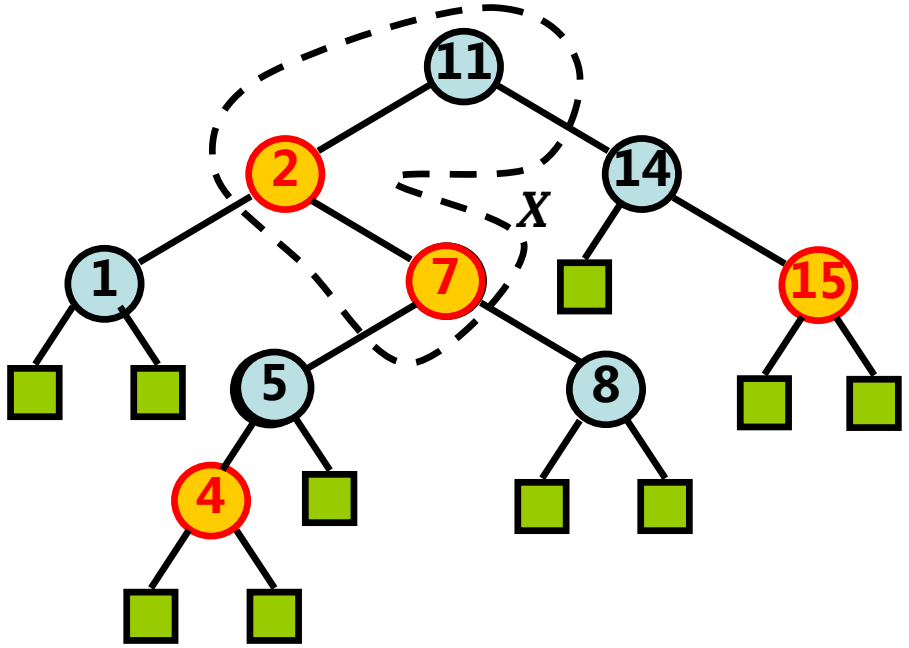
插入 4

- 情况 2 红红冲突
  - 父和叔父也是红
- 父祖换色



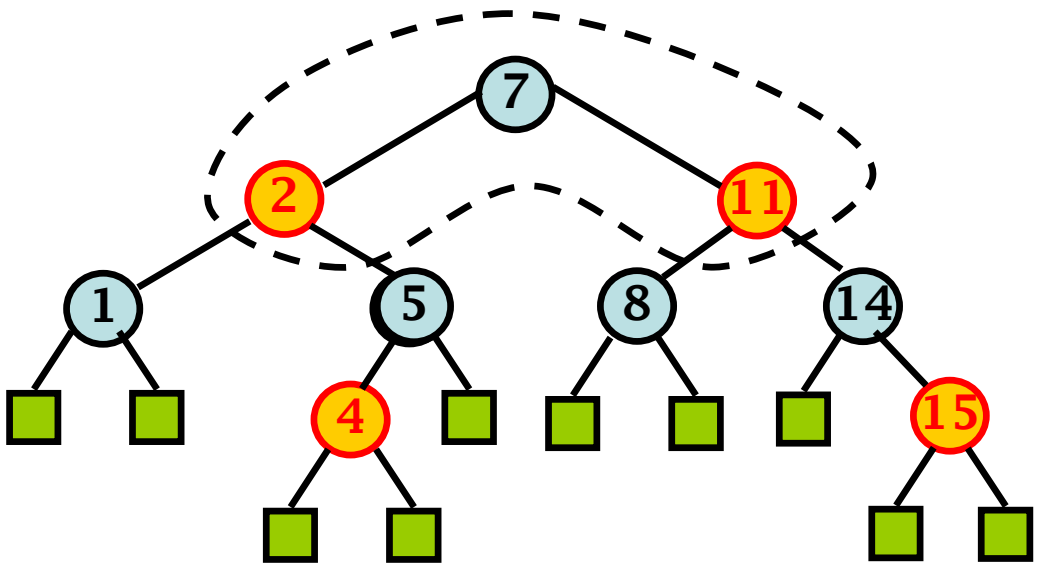
插入 4

- 情况 2 红红冲突
  - 父和叔父也是红
    父祖换色
- 情况 1 红红冲突
  - 叔父是黑
- 重构



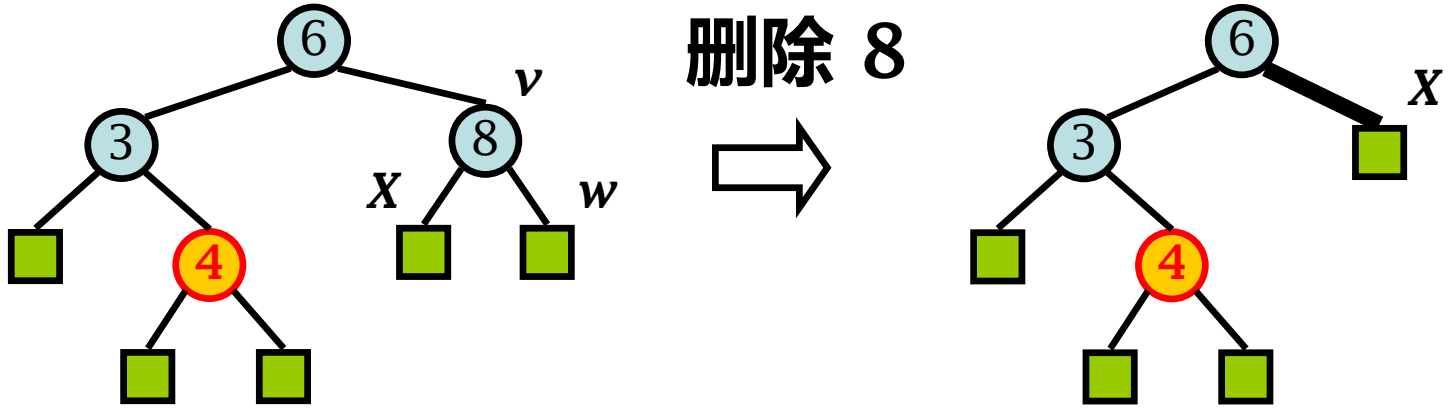
插入 4

- 情况 2 红红冲突
  - 父和叔父也是红
  父祖换色
- 情况 1 红红冲突
  - 叔父是黑
- 重构



11.6.4 删除算法

- 先调用 BST 的删除算法
  - 待删除的结点有一个以上的外部空指针，则直接删除
  - 否则在右子树中找到其后继结点进行值交换（着色不变）删除
- v 是被删除的内结点，w 是被删外结点，X 是 w 的兄弟
  - 如果 v 或者 X 是红色，则把 X 标记为黑色即可
  - 否则，X 需要标记为双黑，根据其兄弟结点 C 进行重构调整



11.6.4 删除算法

根据双黑 X 的兄弟 C 进行调整

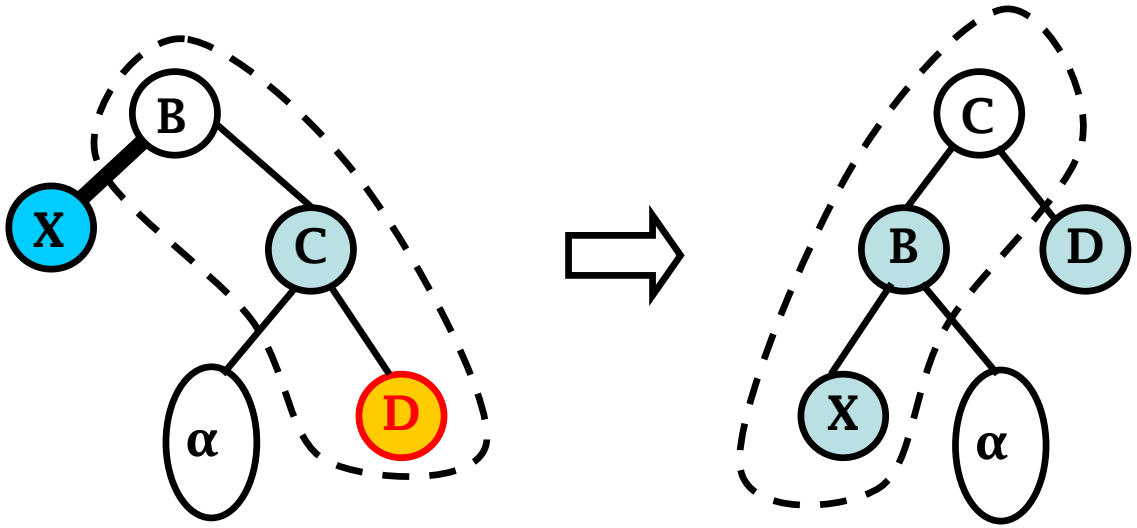
假设X是左子结点（若X为右孩子，则对称）

- **情况 1**： C 是黑色，且子结点有红色
  - 重构，完成操作
- **情况 2**：C 是黑色，且有两个黑子结点
  - 换色
  - 父结点 B 原为黑色，可能需要从 B 继续向上调整
- **情况 3**： C 是红色
  - 转换状态
  - C 转为父结点，调整为情况 1 或 2 继续处理

11.6.4 删除算法

情况 1(a) 重构：侄子红结点八字

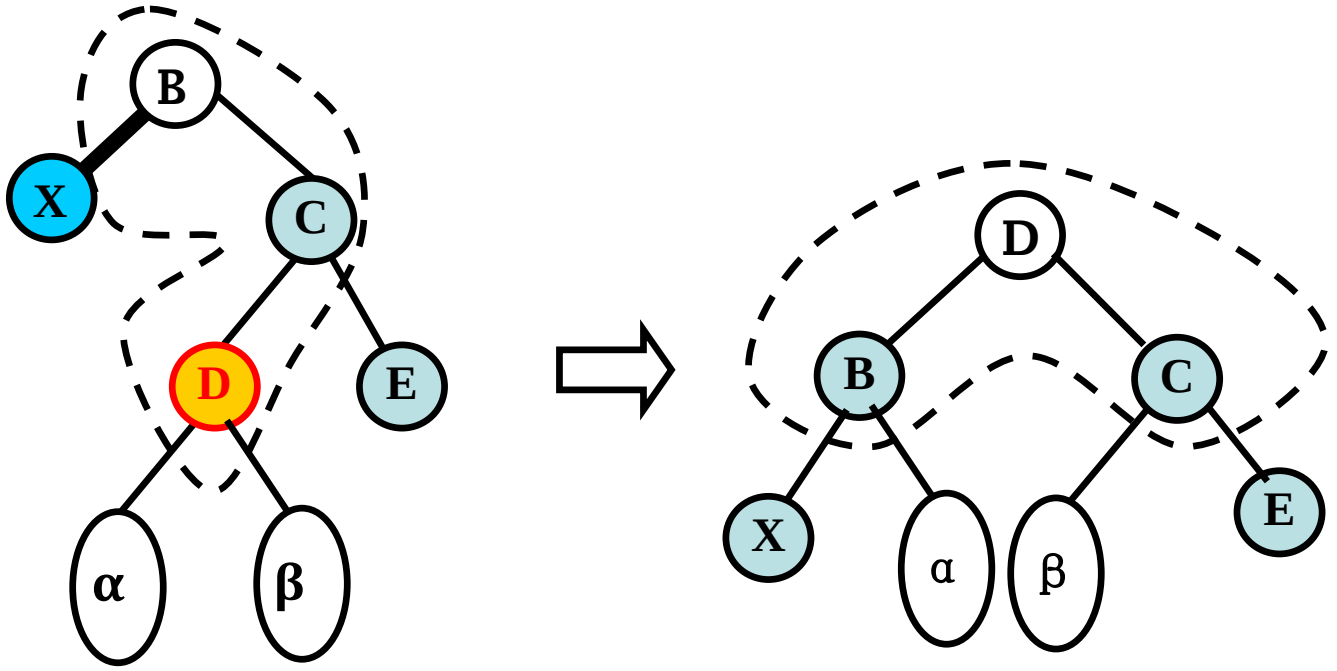
- 将兄弟结点 C 提上去
- C 继承原父结点的颜色
- 然后把B着为黑色，D 着为黑色，其他颜色不变即可



11.6.4 删除算法

情况 1(b) 重构：侄子红结点同边顺

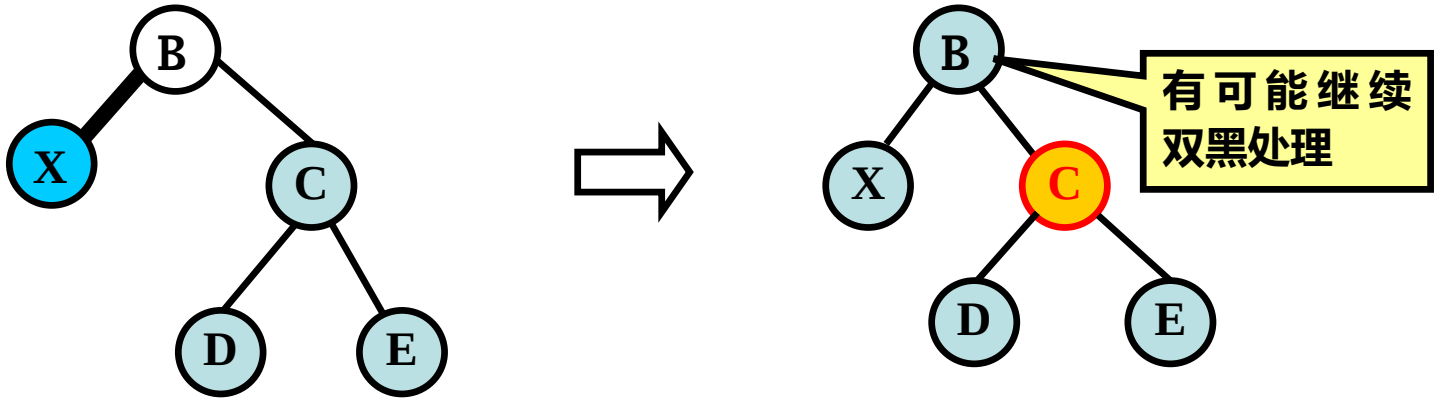
- 将 D 结点旋转为 C 结点的父结点，D 继承原子根 B 的颜色，B 着为黑色



11.6.4 删除算法

情况 2：兄弟是黑色，且有两个黑子结点

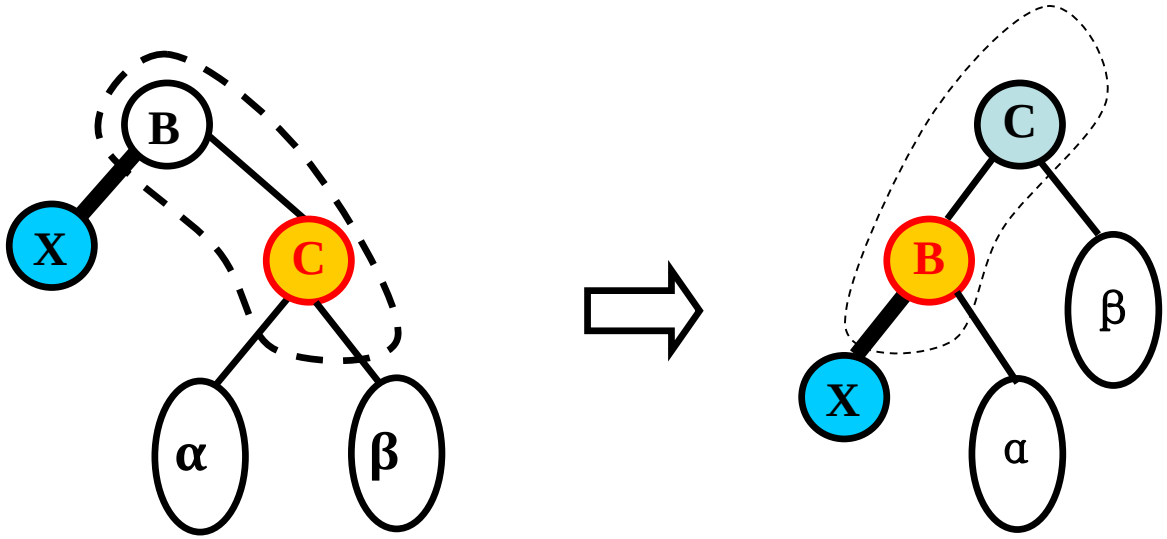
- 把 C 着红色， B 着黑色
- 如果 B 原为红色，则算法结束
- 否则，对 B 继续作“双黑”调整



11.6.4 删除算法

情况 3：兄弟 C 是红色

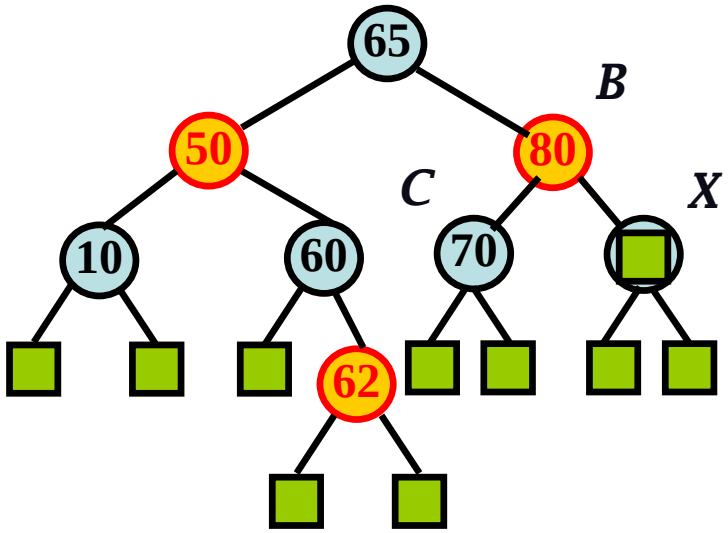
- 旋转
- X 结点仍是“双黑”结点，转化为前面2种情况

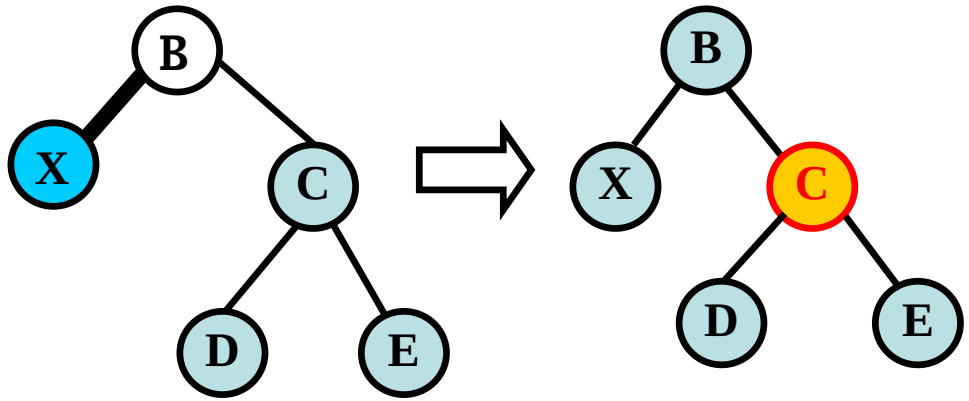


11.6.4 删除算法

删除 90

- 当前结点变为 80 的右黑叶结点
- C 是黑色, 且有两个黑色子结点：情况 2

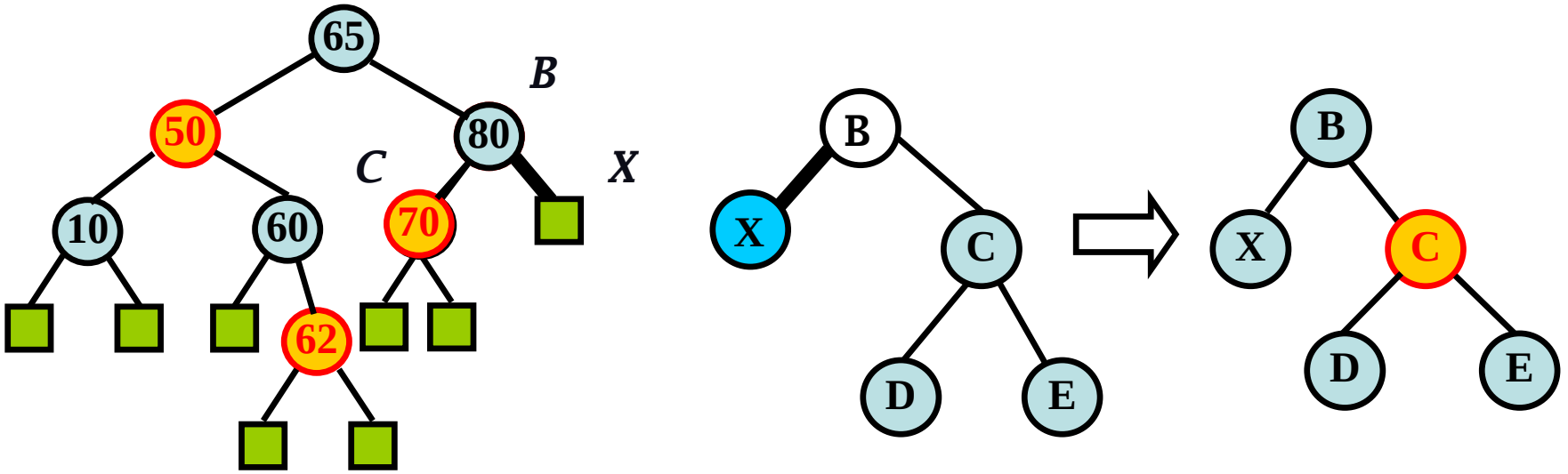




11.6.4 删除算法

删除 90

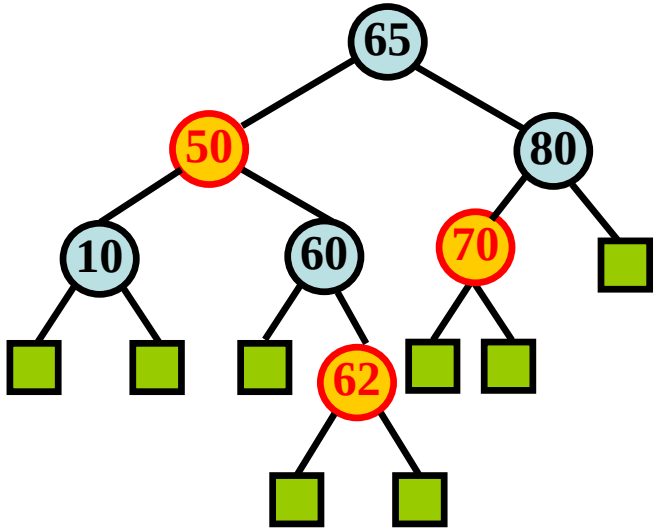
- 当前结点变为 80 的右黑叶结点
- C 是黑色, 且有两个黑色子结点：情况 2 换色



11.6.4 删除算法

删除 70

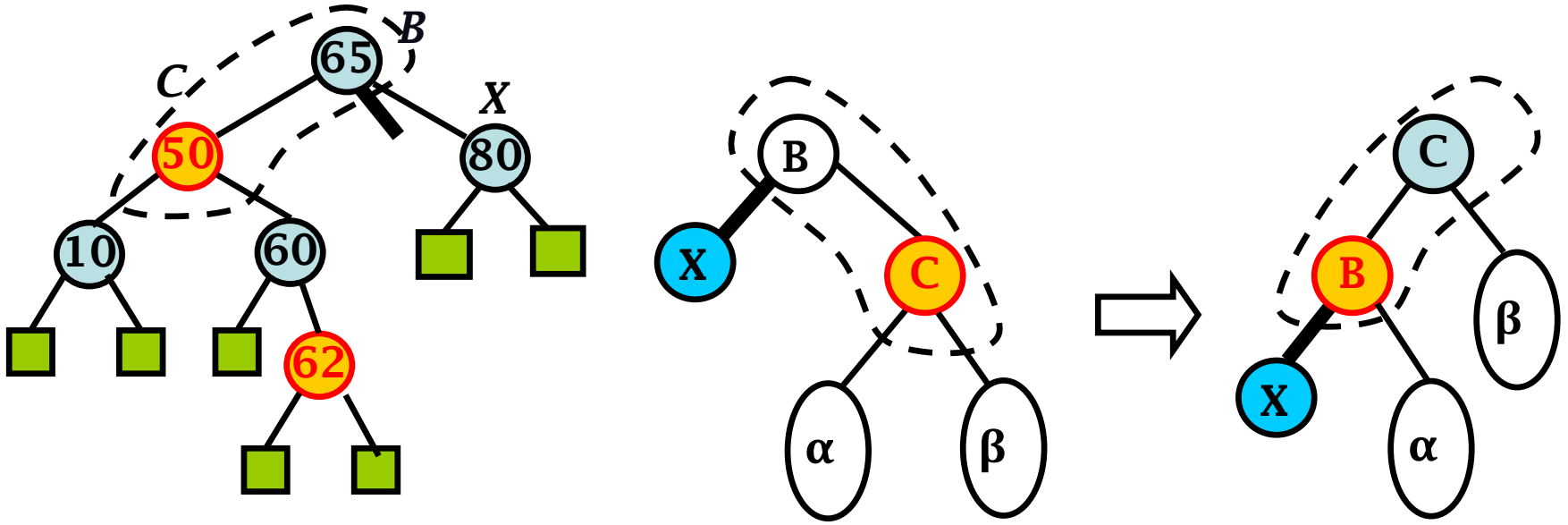
- 红结点，不要调整



11.6.4 删除算法

删除 80

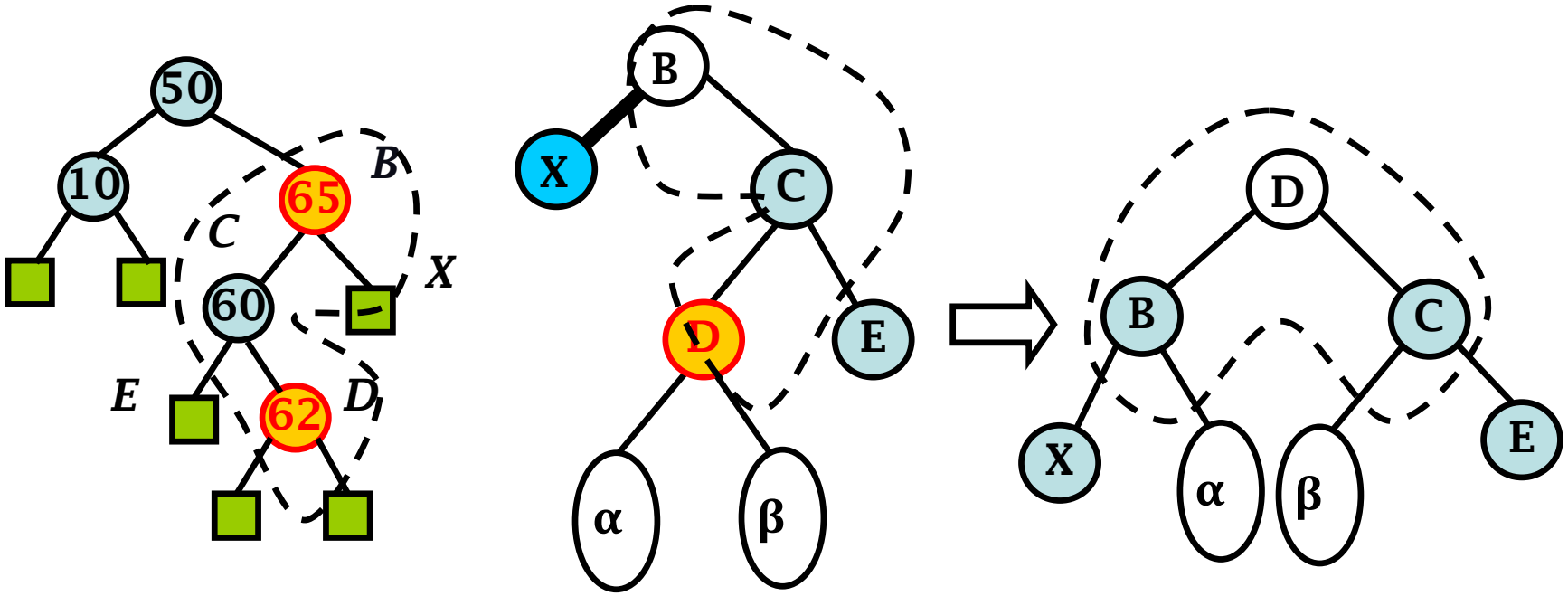
- 当前结点 X 变为 65 的右黑叶结点
- C 是红色：情况 3 状态转换



11.6.4 删除算法

删除 80（调整）

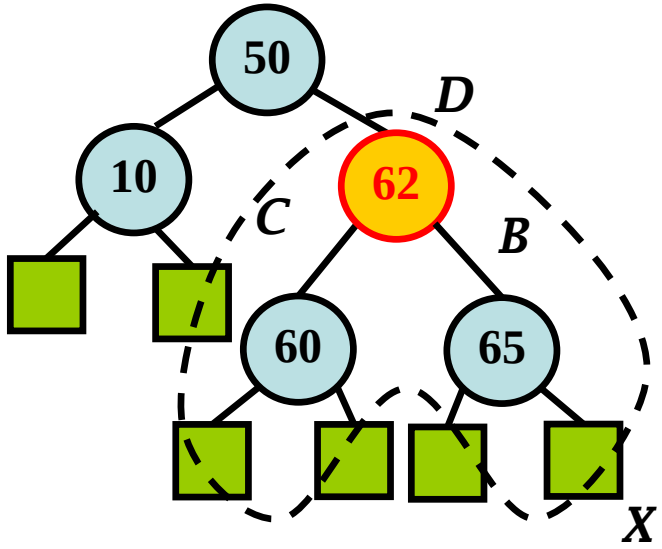
- C 是黑色，且左黑、右红：情况 1(b) 重构



11.6.4 删除算法

删除 80

- 完成调整



11.6.4 删除算法

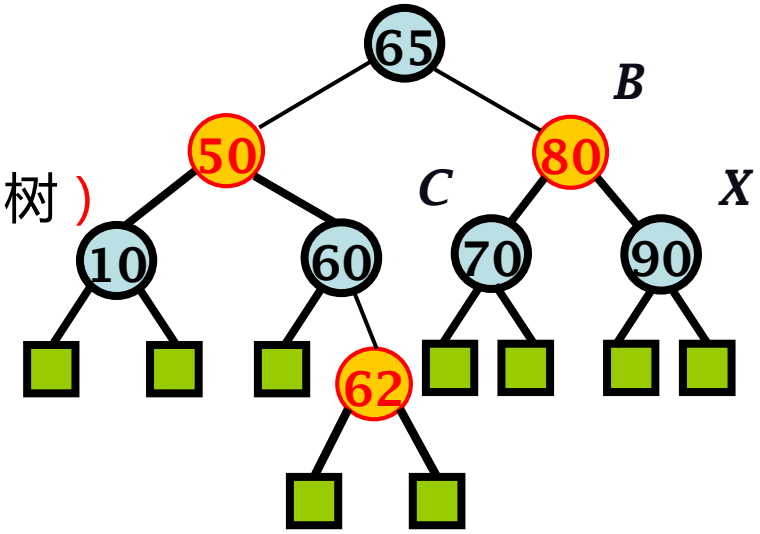
删除操作时间代价

- 其平均和最差检索 $O(\log_2 n)$
  - 自底向根的方向调整
- 红黑树构造
  - （数据，左指针，右指针，颜色，父指针）
- 自顶向下的递归插入/删除调整方法
  - （数据，左指针，右指针，颜色）
  - 若非递归，则记录回溯路径

从 Red-Black-Tree 到 2-3-4 树

- 假设将一棵红黑树的每个红结点“吸收”到他的黑色父结点中，来让红结点的子女变为黑色父结点的子女（忽略关键字的变化）
- 当一个黑结点的所有红色子女都被吸收后， 其可能的度是多少？
  - 2、3、4

    即成为一棵 2-3-4 树（阶为 4 的 B 树）
- 此结果树的叶子深度怎样？
  - 叶结点等高



数据结构与算法

谢谢聆听

国家精品课“数据结构与算法”
http://www.jpk.pku.edu.cn/pkujpk/course/sjjg/

张铭，王腾蛟，赵海燕
高等教育出版社，2008. 6。“十一五”国家级规划教材