数据结构与算法（二）

张铭 主讲

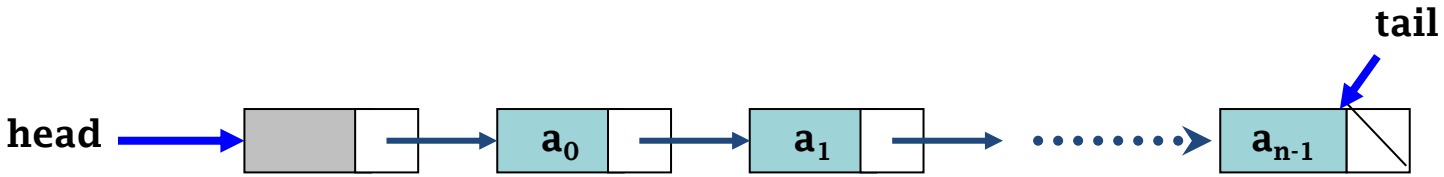
采用教材：张铭，王腾蛟，赵海燕 编写
高等教育出版社，2008.6（“十一五”国家级规划教材）

https://pkumooc.coursera.org/bdsalgo-001/

第二章 线性表

- 2.1 线性表 $\{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$
- 2.2 顺序表

- 2.3 链表



- 2.4 顺序表和链表的比较

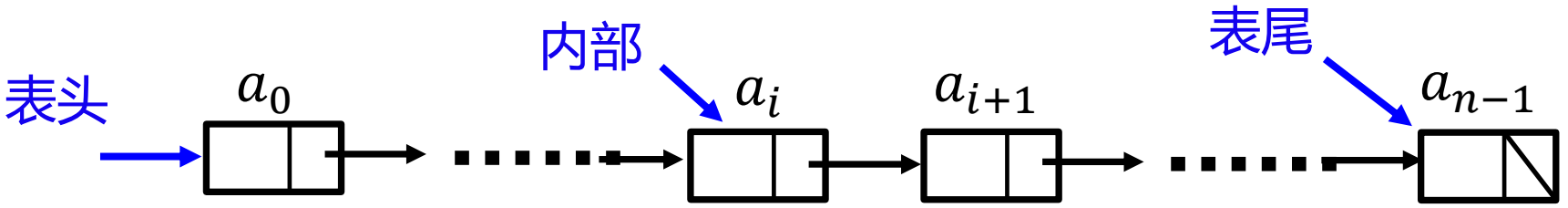
线性表的概念

- 线性表简称表，是零个或多个元素的有穷序列，通常可以表示成 k_0，k_1，…，k_{n-1}（$n \geq 1$）
  - 表目：线性表中的元素（可包含多个数据项，记录）
  - 索引（下标）：i 称为表目 k_i 的“索引”或“下标”
  - 表的长度：线性表中所含元素的个数 n
  - 空表：长度为零的线性表（$n = 0$）
- 线性表特点：
  - 操作灵活，其长度可以增长、缩短

线性结构

- 二元组$B=(K,R)$ $K=\{a_0,a_1,\dots,a_{n-1}\}$ $R=\{r\}$
  - 有一个唯一的**开始结点**，它没有前驱，有一个唯一的直接后继
  - 一个唯一的**终止结点**，它有一个唯一的直接前驱，而没有后继
  - 其它的结点皆称为 **内部结点**，每一个内部结点都有且仅有一个唯一的直接有前驱，也有一个唯一的直接后继

    $<a_i,a_{i+1}>$ a_i是a_{i+1}的前驱，a_{i+1}是a_i的后继
  - 前驱/后继关系r，具有 **反对称性** 和 **传递性**

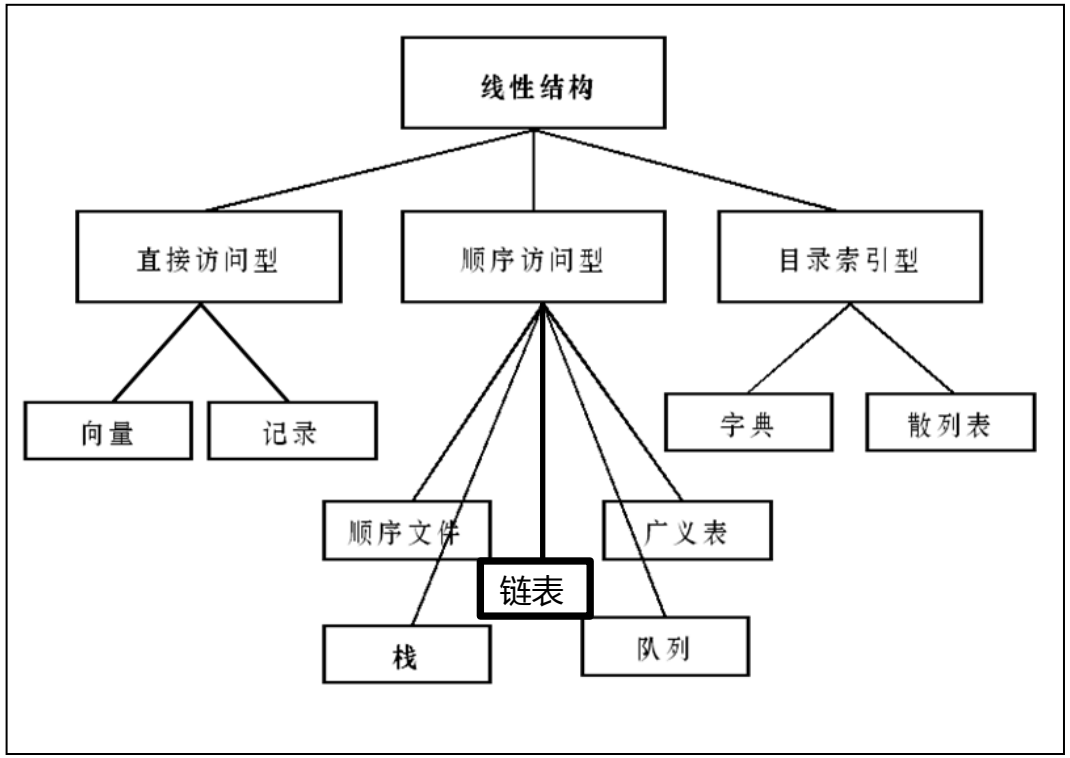


线性结构

- 特点
  - 均匀性：虽然不同线性表的数据元素可以是各种各样的，但对于同一线性表的各数据元素必定具有相同的数据类型和长度
  - 有序性：各数据元素在线性表中都有自己的位置，且数据元素之间的相对位置是线性的

线性结构

- 按复杂程度划分
  - 简单的：线性表、栈、队列、散列表
  - 高级的：广义表、多维数组、文件……
- 按访问方式划分
  - 直接访问型 (direct access)
  - 顺序访问型 (sequential access)
  - 目录索引型 (directory access)



线性结构

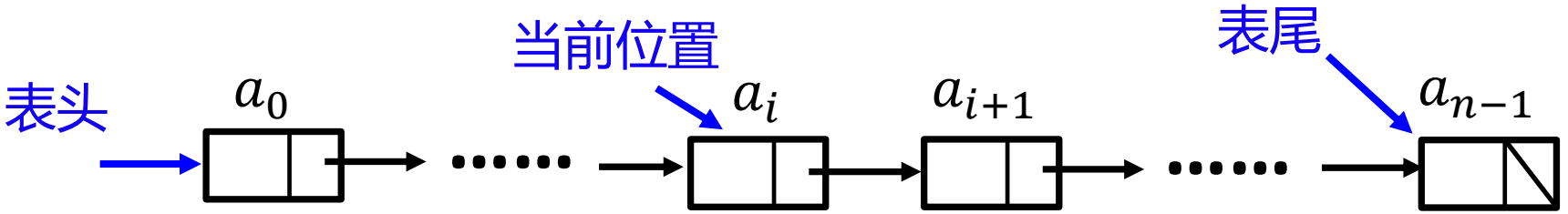
- 按操作划分（详见后）
  - 线性表
    - 所有表目都是同一类型结点的线性表
    - 不限制操作形式
    - 根据存储的不同分为：顺序表，链表
  - 栈 (LIFO, Last In First Out)
    - 插入和删除操作都限制在表的同一端进行
  - 队列 (FIFO, First In First Out)
    - 插入操作在表的一端， 删除操作在另一端

2.1 线性表

- 三个方面
  - 线性表的逻辑结构
  - 线性表的存储结构
  - 线性表运算

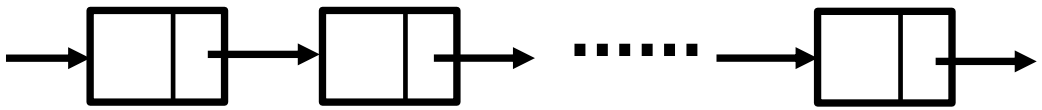
线性表逻辑结构

- 主要属性包括
  - 线性表的长度
  - 表头 (head)
  - 表尾 (tail)
  - 当前位置 (current position)



线性表分类（按存储）

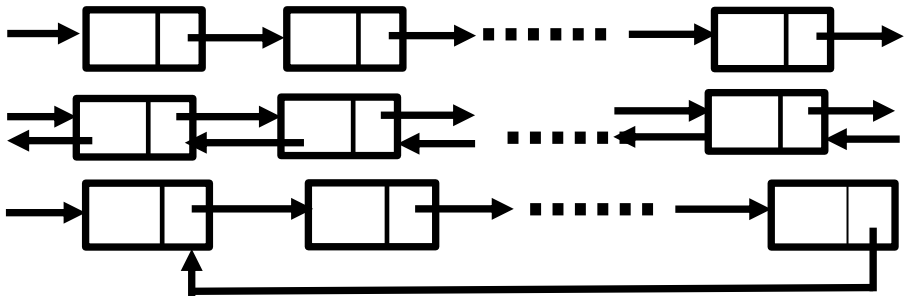
- 线性表
  - 所有表目都是同一类型结点的线性表
  - 不限制操作形式
  - 根据存储的不同分为：**顺序表**，**链表**



线性表的存储结构

- 顺序表
  - 按索引值从小到大存放在一片相邻的连续区域
  - 紧凑结构，存储密度为 1

- 链表
  - 单链表
  - 双链表
  - 循环链表

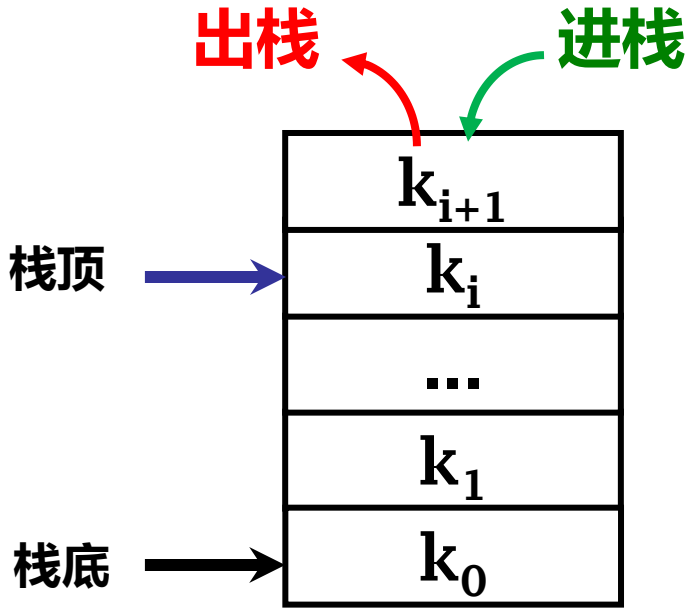


线性表分类（按操作）

- 线性表
  - 不限制操作
- 栈
  - 在同一端操作
- 队列
  - 在两端操作

线性表分类（按操作）

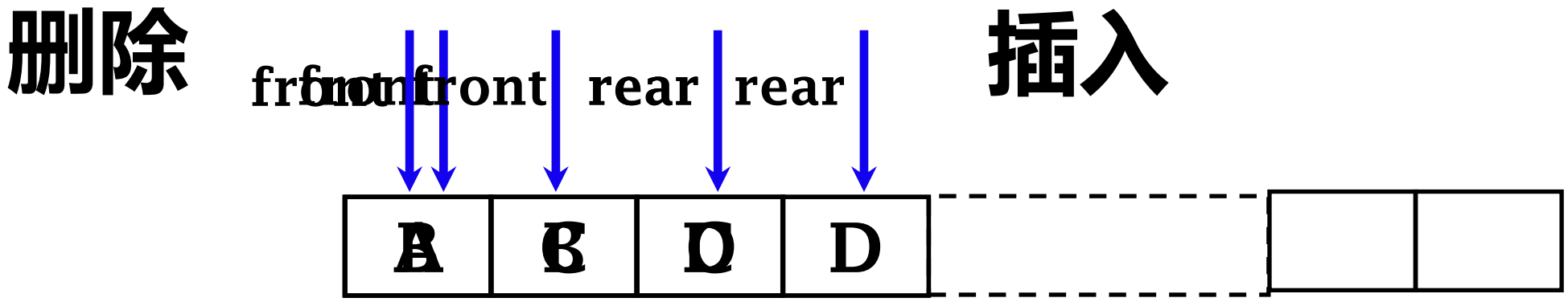
- 栈 (LIFO, Last In First Out)
  - **插入和删除**操作都限制在表的**同一端**进行



线性表分类（按操作）

- 队列 (FIFO, First In First Out)
  - **插入**操作在表的**一端**，**删除**操作在**另一端**

- rear实指



线性表的运算

- 建立线性表
- 清除线性表
- 插入一个新元素
- 删除某个元素
- 修改某个元素
- 排序
- 检索

线性表类模板

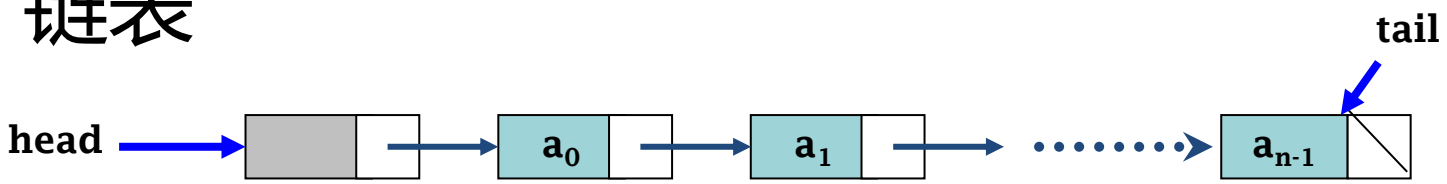
```
template <class T> class List {
    void clear();          // 置空线性表
    bool isEmpty();        // 线性表为空时，返回 true
    bool append(const T value);
                           // 在表尾添加一个元素 value，表的长度增 1
    bool insert(const int p, const T value);
                           // 在位置 p 上插入一个元素 value，表的长度增 1
    bool delete(const int p);
                           // 删除位置 p 上的元素，表的长度减 1
    bool getPos(int& p, const T value);
                           // 查找值为 value 的元素并返回其位置
    bool getValue(const int p, T& value);
                           // 把位置 p 元素值返回到变量 value
    bool setValue(const int p, const T value);
                           // 用 value 修改位置 p 的元素值
};
```

思考

- 线性表有哪些分类方式？
- 各种线性表名称中，哪些跟存储结构相关？哪些跟运算相关？

第二章 线性表

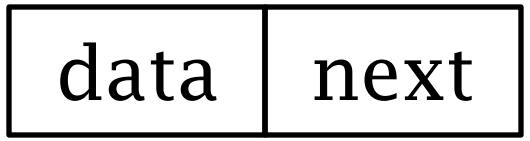
- 2.1 线性表
- 2.2 顺序表
- 2.3 链表



- 2.4 顺序表和链表的比较

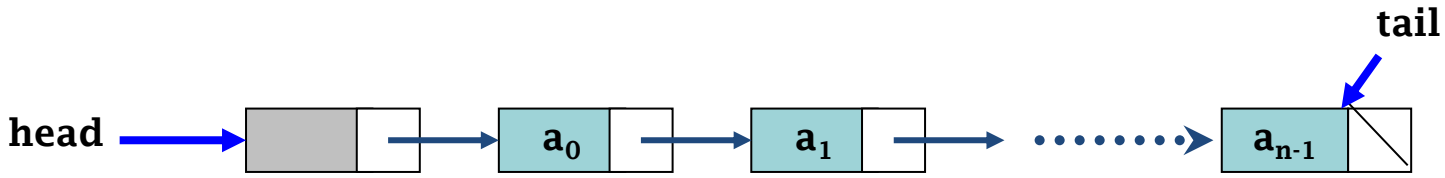
链表 (linked list)

- 通过指针把它的一串存储结点链接成一个链
- 存储结点由两部分组成：
  - 数据域 + 指针域（后继地址）

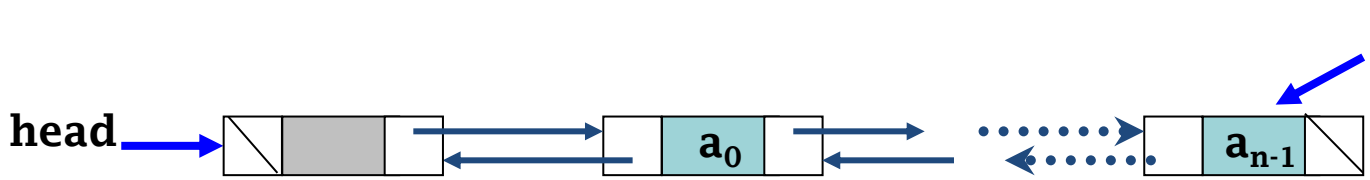


2.3 链表

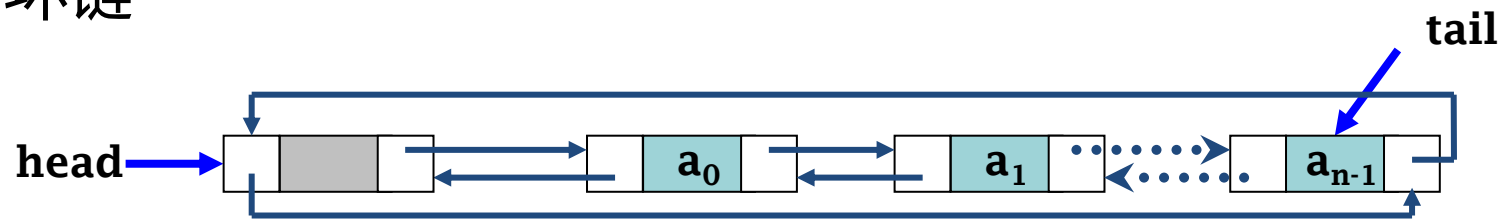
- 分类（根据链接方式和指针多寡）
  - 单链



  - 双链

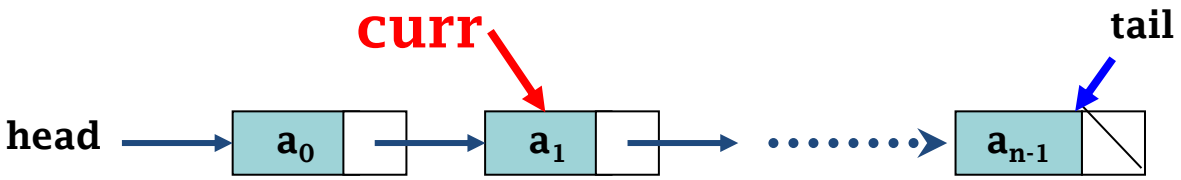


  - 循环链



单链表 (singly linked list)

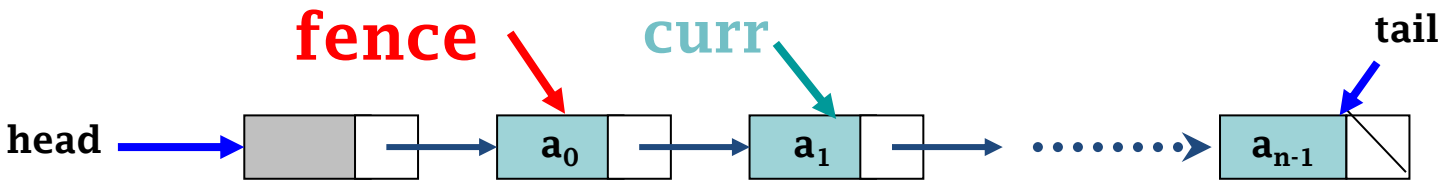
- 简单的单链表
  - 整个单链表： head
  - 第一个结点： head
  - 空表判断： head == NULL
  - 当前结点 a_1 ：curr



单链表 (singly linked list)

- 带头结点的单链表
  - 整个单链表： head
  - 第一个结点： head->next , head ≠ NULL
  - 空表判断： head->next == NULL

  当前结点a_1：fence->next (curr 隐含)



单链表的结点类型

```
template <class T> class Link {
    public:
    T    data;                    // 用于保存结点元素的内容
    Link<T> * next;               // 指向后继结点的指针

    Link(const T info, const Link<T>* nextValue =NULL)  {
        data = info;
        next = nextValue;
    }
    Link(const Link<T>* nextValue)  {
        next = nextValue;
    }
};
```

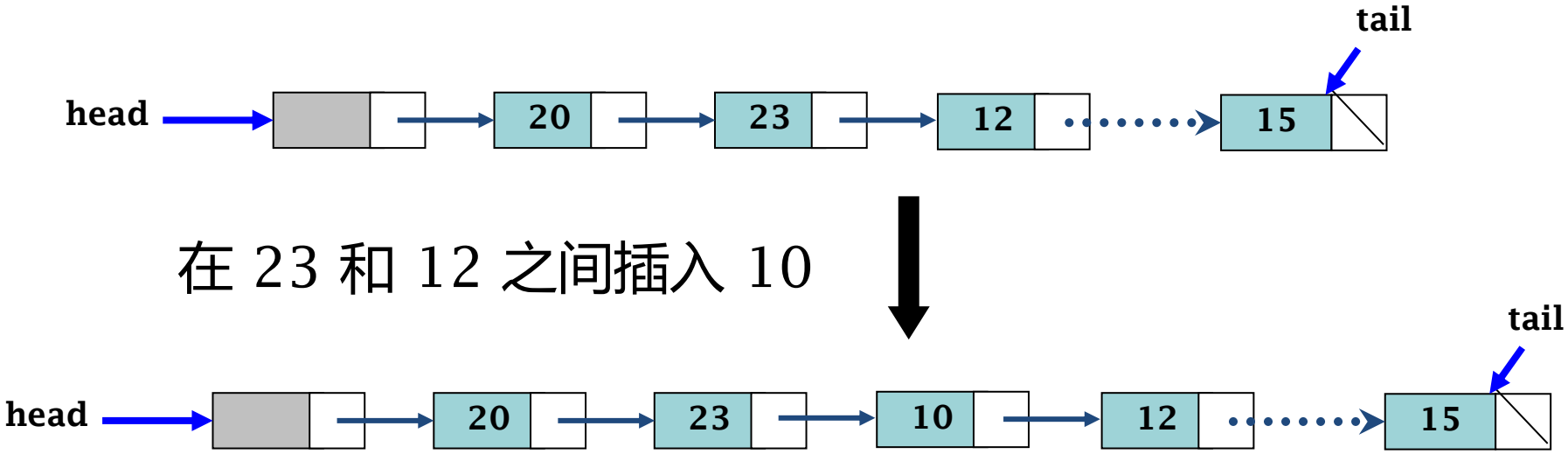
单链表类定义

```
template <class T> class lnkList : public List<T> {
    private:
    Link<T>  * head, *tail;                    // 单链表的头、尾指针
    Link<T>  *setPos(const int p);             // 第p个元素指针
     public:
    lnkList(int s);                            // 构造函数
    ~lnkList();                                // 析构函数
    bool isEmpty();                            // 判断链表是否为空
    void clear();                              // 将链表存储的内容清除，成为空表
    int length();                              // 返回此顺序表的当前实际长度
    bool append(cosnt T value);                // 表尾添加一个元素 value，表长度增 1
    bool insert(cosnt int p, cosnt T value); // 位置 p 上插入一个元素
    bool delete(cosnt int p);                  // 删除位置 p 上的元素，表的长度减 1
    bool getValue(cosnt int p, T& value);    // 返回位置 p 的元素值
    bool getPos(int &p, const T value);      // 查找值为 value 的元素
}
```

查找单链表中第 i 个结点

```
// 函数返回值是找到的结点指针
template <class T>          // 线性表的元素类型为 T
Link<T> * lnkList <T>:: setPos(int i) {
    int count = 0;
     if (i == -1)                  //  i 为 -1 则定位到头结点
        return head;
    // 循链定位，若i为0则定位到第一个结点
    Link<T> *p = head->next;
    while (p != NULL && count < i) {
        p = p-> next;
        count++;
     };
     // 指向第 i 结点，i = 0,1,…，当链表中结点数小于 i 时返回 NULL
    return p;
}
```

单链表的插入



- 创建新结点
- 新结点指向右边的结点
- 左边结点指向新结点

单链表插入算法

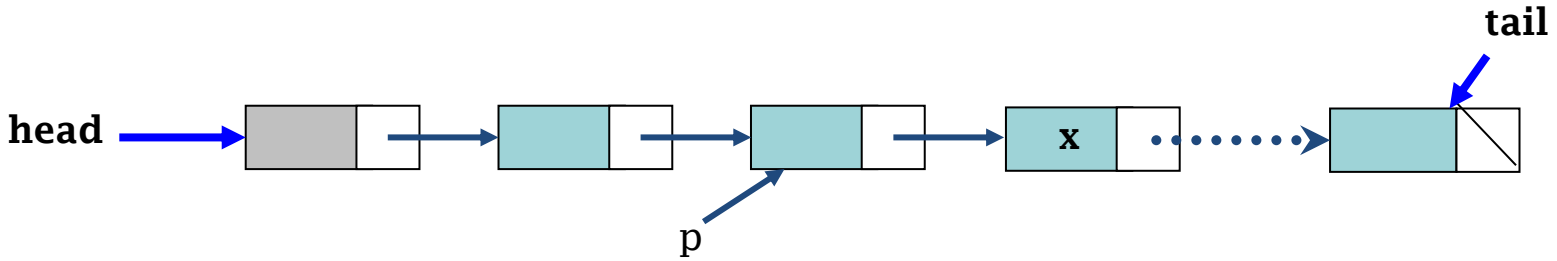
```
// 插入数据内容为value的新结点作为第 i 个结点
template <class T>                          // 线性表的元素类型为 T
bool lnkList<T> :: insert(const int i, const T value)  {
    Link<T> *p, *q;

    if ((p = setPos(i -1)) == NULL)  {    // p 是第 i 个结点的前驱
        cout << " 非法插入点"<< endl;
        return false;
    }
    q = new Link<T>(value, p->next);
    p->next = q;
    if (p == tail)                  // 插入点在链尾，插入结点成为新的链尾
        tail = q;
    return true;
}
```

单链表的删除

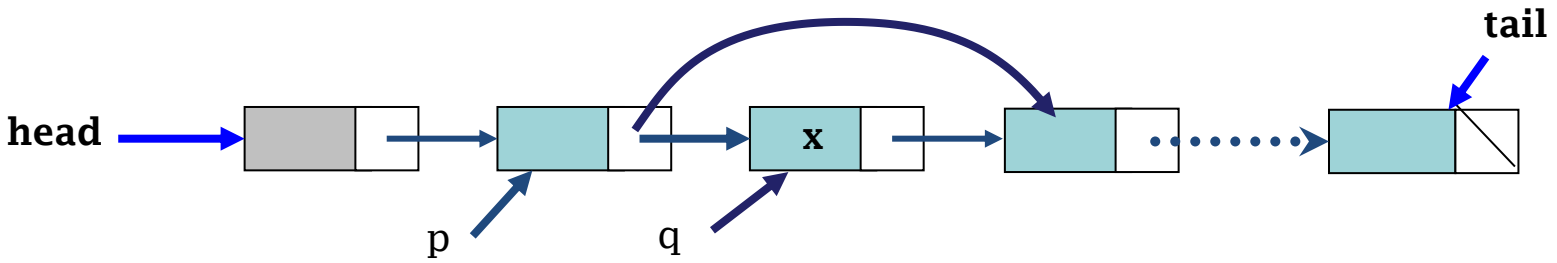
- 从链表中删除结点 x
  - 1. 用 p 指向元素 x 的结点的前驱结点
  - 2. 删除元素为 x 的结点
  - 3. 释放 x 占据的空间

单链表删除示意




```
p = head;
while (p->next!=NULL && p->next->info!= x)
        p = p->next;
```

删除值为 x 的结点




```
q = p->next;
p->next = q->next;
free(q);
```

单链表删除算法

```
template <class T>                    // 线性表的元素类型为 T
bool lnkList<T>:: delete((const int i) {
    Link<T> *p, *q;
     // 待删结点不存在，即给定的i大于当前链中元素个数
    if  ((p = setPos(i-1)) == NULL  ||  p == tail) {
        cout << " 非法删除点 " << endl;
        return false;
    }
    q = p->next;                      // q 是真正待删结点
    if (q == tail) {                  // 待删结点为尾结点，则修改尾指针
        tail = p;
        p->next = NULL:
    }
    else                              // 删除结点 q 并修改链指针
        p->next = q->next;
    delete q;
    return true;
}
```

单链表上运算的分析

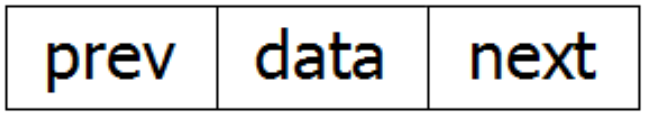
- 对一个结点操作，必先找到它，即用一个指针指向它
- 找单链表中任一结点，**都必须从第一个点开始**

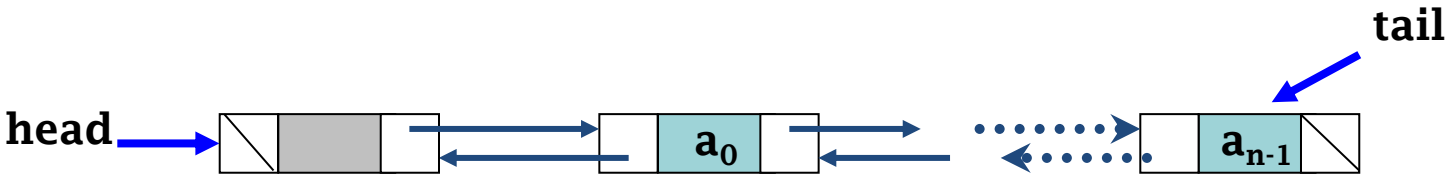
```
p = head;
while (没有到达) p = p->next;
```

- 单链表的时间复杂度 $O(n)$
  - 定位：$O(n)$
  - 插入：$O(n)+O(1)$
  - 删除：$O(n)+O(1)$

双链表(double linked list)

- 为弥补单链表的不足,而产生双链表
  - 单链表的 next 字段仅仅指向后继结点，不能有效地找到前驱, 反之亦然
  - 增加一个指向前驱的指针



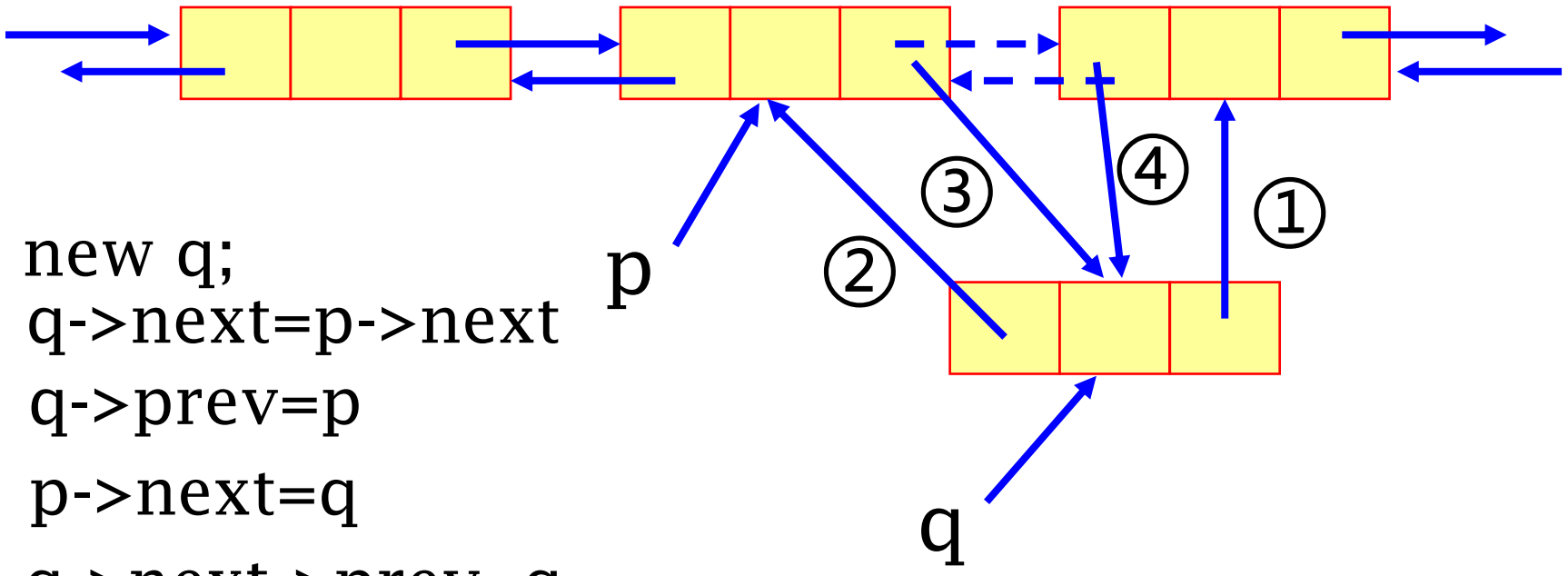


双链表及其结点类型的说明

```
template <class T> class Link {
    public:
    T  data;                    // 用于保存结点元素的内容
    Link<T> * next;             // 指向后继结点的指针
    Link<T> *prev;                  // 指向前驱结点的指针
    Link(const T info, Link<T>* preValue = NULL, Link<T>* nextValue = NULL) {
    // 给定值和前后指针的构造函数
        data = info;
        next = nextValue;
        prev = preValue;
    }
    Link(Link<T>* preValue = NULL, Link<T>* nextValue = NULL)  {
    // 给定前后指针的构造函数
        next = nextValue;
        prev = preValue;
    }
}
```

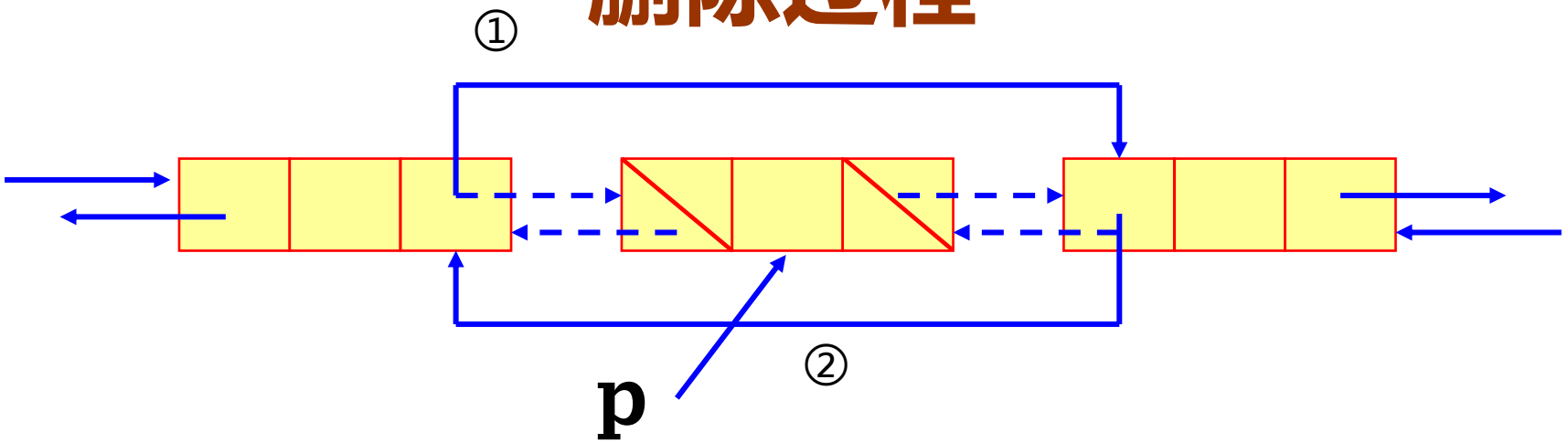
双链表插入过程（注意顺序）

在 p 所指结点后面插入一个新结点



new q;
q->next=p->next
q->prev=p
p->next=q
q->next->prev=q

删除过程



删除 p 所指的结点

p->prev->next=p->next

p->next->prev=p->prev

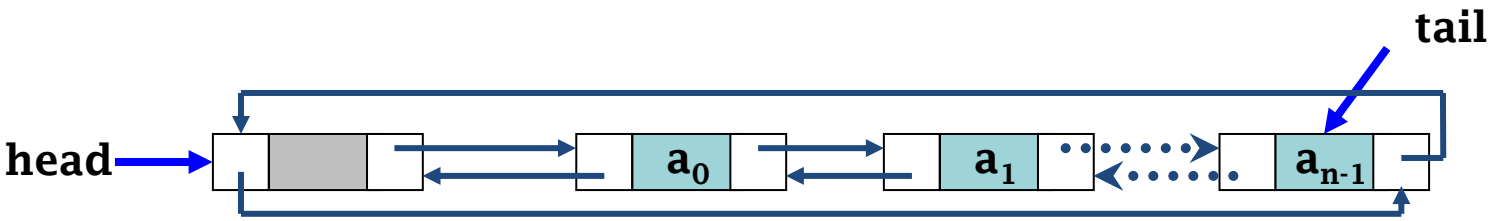
p->next=NULL

p->prev=NULL

- 如果马上删除 p
  - 则可以不赋空

循环链表 (circularly linked list)

- 将单链表或者双链表的头尾结点链接起来，就是一个循环链表
- 不增加额外存储花销，却给不少操作带来了方便
  - 从循环表中任一结点出发，都能访问到表中其他结点



链表的边界条件

- 几个特殊点的处理
  - 头指针处理
  - 非循环链表尾结点的指针域保持为 NULL
  - 循环链表尾结点的指针回指头结点
- 链表处理
  - 空链表的特殊处理
  - 插入或删除结点时指针勾链的顺序
  - 指针移动的正确性
    - 插入
    - 查找或遍历

思考

- 带表头与不带表头的单链表？
- 处理链表需要注意的问题？

第二章 线性表

- 2.1 线性表
- 2.2 顺序表 

- 2.3 链表
- 2.4 顺序表和链表的比较

2.2 顺序表

- 也称向量，采用定长的一维数组存储结构
- 主要特性
  - 元素的类型相同
  - 元素顺序地存储在连续存储空间中，每一个元素有唯一的索引值
  - 使用常数作为向量长度
- 数组存储
- 读写其元素很方便 ，通过下标即可指定位置
  - 只要确定了首地址，线性表中任意数据元素都可以随机存取

2.2 顺序表

- 元素地址计算如下所示：
  - $Loc(k_i) = Loc(k_0) + c \times i,\ c = \text{sizeof}(ELEM)$

逻辑地址(下标)	数据元素
0	k_0
1	k_1
…	…
i	k_i
…	
n-1	k_{n-1}

存储地址	数据元素
$Loc(k_0)$	k_0
$Loc(k_0)+c$	k_1
…	…
$Loc(k_0)+i*c$	k_i
…	
$Loc(k_0)+(n-1)*c$	k_{n-1}

顺序表类定义

```
class arrList : public List<T> {       // 顺序表，向量
private:                                          // 线性表的取值类型和取值空间
   T * aList ;                         // 私有变量，存储顺序表的实例
   int maxSize;                        // 私有变量，顺序表实例的最大长度
   int curLen;                         // 私有变量，顺序表实例的当前长度
   int position;                       // 私有变量，当前处理位置
public:
   arrList(const int size) {                      // 创建新表，设置表实例的最大长度
      maxSize = size;  aList = new T[maxSize];
            curLen = position = 0;
   }
   ~arrList() {                        // 析构函数，用于消除该表实例
            delete [] aList;
   }
```

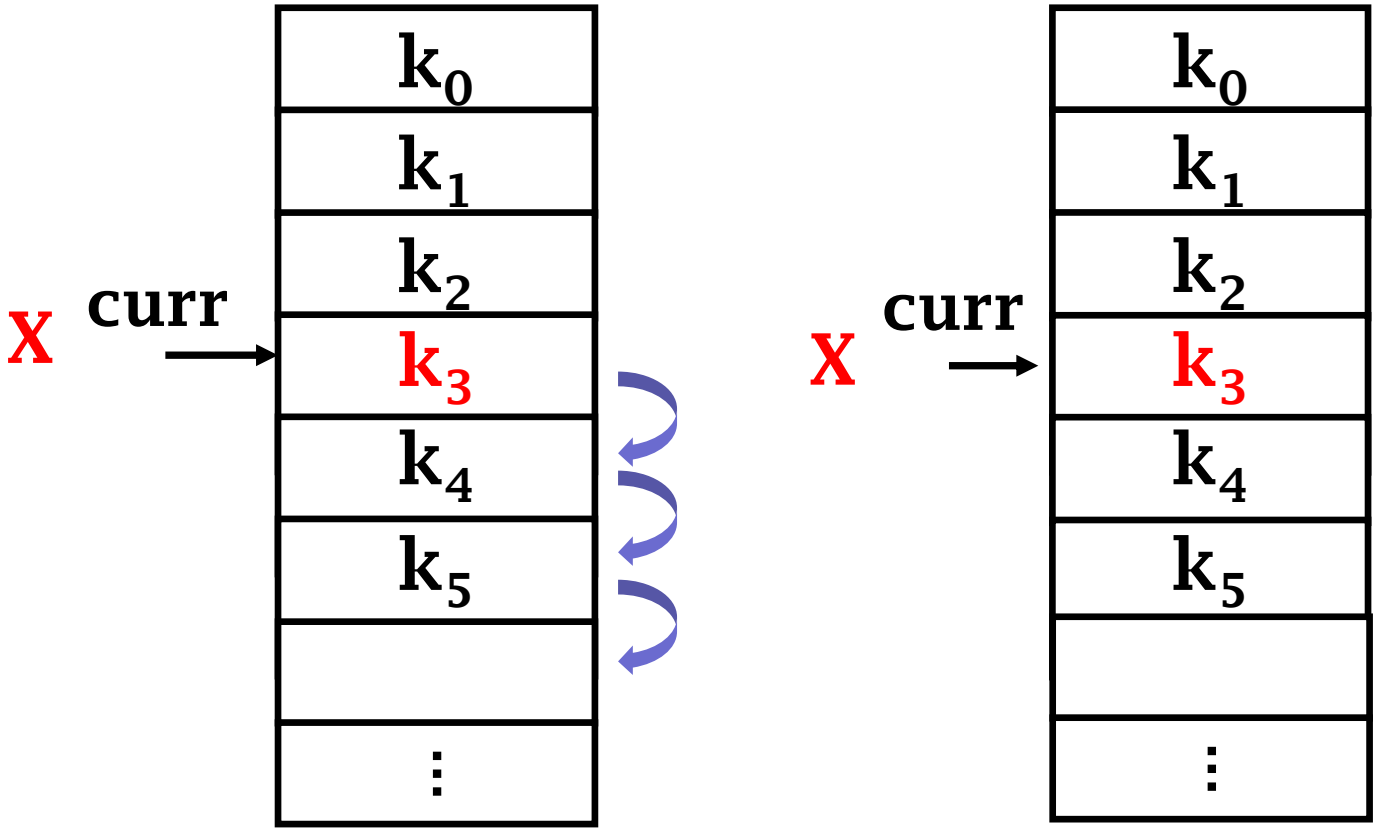
顺序表类定义

```
    void clear() {    // 将顺序表存储的内容清除，成为空表
        delete [] aList; curLen = position = 0;
              aList = new T[maxSize];
    }
    int  length();                                    // 返回当前实际长度
    bool append(const T value);                       // 在表尾添加元素 v
    bool insert(const int p, const T value);    // 插入元素
    bool delete(const int p);                         // 删除位置 p 上元素
    bool setValue(const int p, const T value);        // 设元素值
    bool getValue(const int p, T& value);       // 返回元素
    bool getPos(int &p, const T value);               // 查找元素
};
```

顺序表上的运算

- 重点讨论
  - 插入元素运算
    - bool insert(const int p, const T value);
  - 删除元素运算
    - bool delete(const int p);
- 其他运算请大家思考……

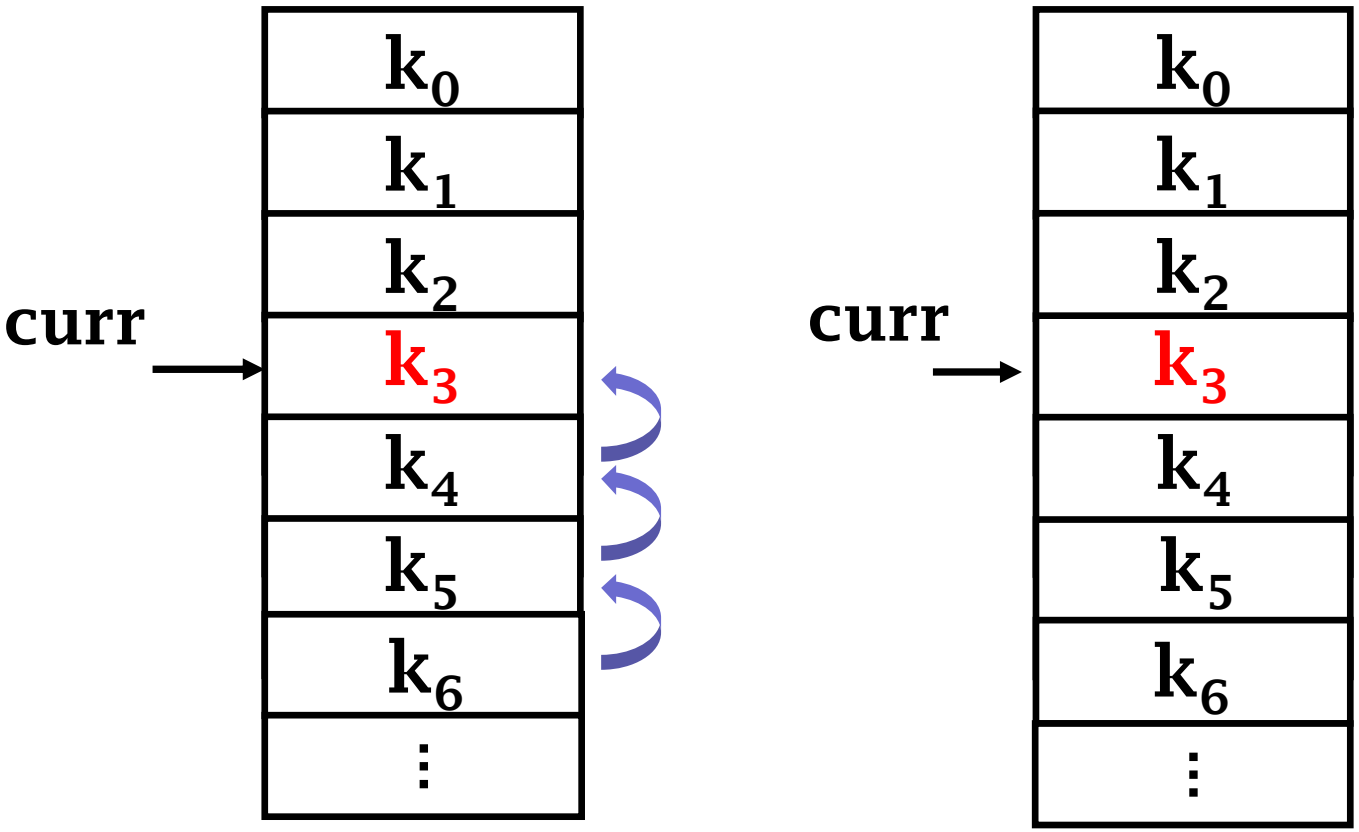
顺序表的插入图示



顺序表的插入

```
// 设元素的类型为T， aList是存储顺序表的数组， maxSize是其最大长度；
// p为新元素value的插入位置，插入成功则返回true， 否则返回false
template <class T>  bool arrList<T> :: insert (const int p, const T value)  {
    int i;
    if (curLen >= maxSize)  { // 检查顺序表是否溢出
        cout << "The list is overflow"<< endl;  return false;
    }
    if (p < 0 || p > curLen)  {  // 检查插入位置是否合法
        cout << "Insertion point is illegal"<< endl;  return false;
    }
    for (i = curLen; i > p; i--)
        aList[i] = aList[i-1];      // 从表尾 curLen -1 起往右移动直到 p
    aList[p] = value;               // 位置 p 处插入新元素
    curLen++;                       // 表的实际长度增 1
    return true;
}
```

顺序表的删除图示



顺序表的删除

```
// 设元素的类型为 T；aList是存储顺序表的数组； p 为即将删除元素的位置
// 删除成功则返回 true，否则返回 false
template <class T>                    // 顺序表的元素类型为 T
bool arrList<T> :: delete(const int p) {
    int i;
    if (curLen <= 0 ) {               // 检查顺序表是否为空
        cout << " No element to delete \n"<< endl;
        return false ;
    }
    if (p < 0 || p > curLen-1) {      // 检查删除位置是否合法
        cout << "deletion is illegal\n"<< endl;
        return false ;
    }
    for (i = p; i < curLen-1; i++)
        aList[i] = aList[i+1];        // 从位置p开始每个元素左移直到 curLen
    curLen--;                         // 表的实际长度减1
    return true;
}
```

顺序表插入删除运算的算法分析

- 表中元素的移动
  - 插入：移动 $n-i$
  - 删除：移动 $n-i-1$ 个
- i 的位置上插入和删除的概率分别是 p_i 和 p_i'
  - 插入的平均移动次数为

$$M_i = \sum_{i=0}^{n}(n-i)p_i$$

  - 删除的平均移动次数为

$$M_d = \sum_{i=0}^{n-1}(n-i-1)p_i'$$

算法分析

- 如果在顺序表中每个位置上插入和删除元素的概率相同，即 $p_i = \frac{1}{n+1}$，$p_i' = \frac{1}{n}$

$$M_i = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}(n-i) = \frac{1}{n+1}(\sum_{i=0}^{n}n - \sum_{i=0}^{n}i)$$

$$= \frac{n(n+1)}{n+1} - \frac{n(n+1)}{2(n+1)} = \frac{n}{2}$$

$$M_d = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}(n-i-1) = \frac{1}{n}(\sum_{i=0}^{n}n - \sum_{i=0}^{n}i - n)$$

$$= \frac{n^2}{n} - \frac{(n-1)}{2} - 1 = \frac{n-1}{2}$$

时间代价为$O(n)$

思考

- 顺序表中，插入删除操作需要考虑哪些问题？
- 顺序表有哪些优缺点？

第二章　线性表

- 2.1 线性表
- 2.2 顺序表
- 2.3 链表
- 2.4 顺序表和链表的比较

2.4 线性表实现方法的比较

- 顺序表的主要优点
  - 没有使用指针，不用花费额外开销
  - 线性表元素的读访问非常简洁便利
- 链表的主要优点
  - 无需事先了解线性表的长度
  - 允许线性表的长度动态变化
  - 能够适应经常插入删除内部元素的情况
- 总结
  - 顺序表是存储静态数据的不二选择
  - 链表是存储动态变化数据的良方

顺序表和链表的比较

- 顺序表
  - 插入、删除运算时间代价 O(n)，查找则可常数时间完成
  - 预先申请固定长度的连续空间
  - 如果整个数组元素很满，则没有结构性存储开销
- 链表
  - 插入、删除运算时间代价 O(1)，但找第i个元素运算时间代价 O(n)
  - 存储利用指针，动态地按照需要为表中新的元素分配存储空间
  - 每个元素都有结构性存储开销

顺序表和链表存储密度

n 表示线性表中当前元素的数目，

P 表示指针的存储单元大小（通常为 4 bytes）

E 表示数据元素的存储单元大小

D 表示可以在数组中存储的线性表元素的最大数目

- 空间需求
  - 顺序表的空间需求为 DE
  - 链表的空间需求为 n(P + E)
- n 的临界值，即 n > DE / (P+E)
  - n 越大，顺序表的空间效率就更高
  - 如果P = E，则临界值为 n = D / 2

应用场合的选择

- 顺序表不适用的场合
  - 经常插入删除时，不宜使用顺序表
  - 线性表的最大长度也是一个重要因素
- 链表不适用的场合
  - 当读操作比插入删除操作频率大时，不应选择链表
  - 当指针的存储开销，和整个结点内容所占空间相比其比例较大时，应该慎重选择

顺序表和链表的选择

- 顺序表
  - 结点总数目大概可以估计
  - 线性表中结点比较稳定（插入删除少）
  - $n > DE / (P + E)$
- 链表
  - 结点数目无法预知
  - 线性表中结点动态变化（插入删除多）
  - $n < DE / (P + E)$

思考

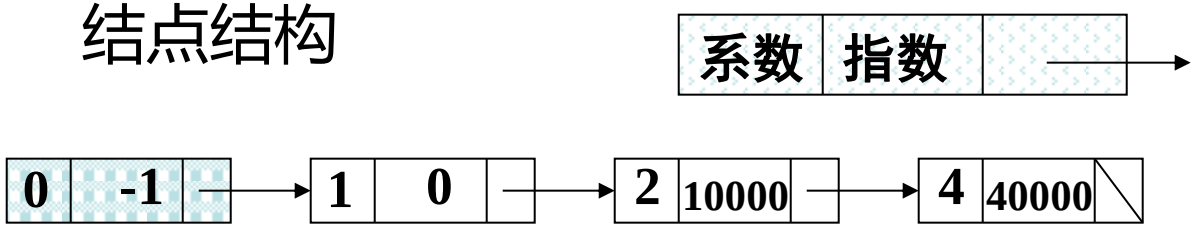
- 顺序表和链表的选择？
  - 结点变化的动态性
  - 存储密度

思考：一元多项式的表达

- 一元多项式：$P_n(x) = p_0+p_1x+p_2x^2+\ldots+p_n\ x^n$
- 线性表表示：$P = (p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n)$
- 顺序表表示：只存系数（第 i 个元素存 x^i 的系数）

数据稀疏的情况：$p(x) = 1+2x^{10000}+4x^{40000}$

- 链表表示：　结点结构



数据结构与算法

谢谢聆听

国家精品课“数据结构与算法”
http://www.jpk.pku.edu.cn/pkujpk/course/sjjg/

张铭，王腾蛟，赵海燕
高等教育出版社，2008. 6。“十一五”国家级规划教材