

第七章 量纲分析与相似理论

量纲分析法是用于寻求一定物理过程中, 相关物理量之间规律性联系的一种方法。它对于正确地分析、科学地表达物理过程是十分有益的。两个规模不同的流动相似是流体力学试验时必须面对的问题。本章在量纲分析法的基础上探讨流动的相似理论, 对流体力学试验研究有重要的指导意义。

§ 7—1 量纲分析

一. 量纲、无量纲量

- 量纲是指物理量所包含的基本物理要素及其结合形式, 表示物理量的类别, 是物理量的质的特征。
- 在量度物理量数值大小的标准(单位)确定之后, 一个具体的物理量就对应于一个数值, 有了比较意义上的大小, 这是物理量的量的特征。
- 量纲可分为基本量纲和诱导量纲。基本量纲具有独立性, 比如与温度无关的动力学问题可选取长度[L]、时间[T]和质量[M]为基本量纲。诱导量纲可由量纲公式通过基本量纲导出, 如 $[x] = [L^\alpha T^\beta M^\gamma]$, α, β, γ 称为量纲指数。若 $\alpha \neq 0, \beta = 0, \gamma = 0$, 则 x 为几何学的量; 若 $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma = 0$, 则 x 为运动学的量, 如运动粘性系数 $[\nu] = [L^2 T^{-1}]$; 若 $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma \neq 0$, 则 x 为动力学的量, 如动力粘性系数 $[\mu] = [L^{-1} T^{-1} M]$ 。
- 如果一个物理量的所有量纲指数为零, 就称为无量纲(量纲为一)量。无量纲量可以是相同量纲量的比值(如角度, 三角函数), 也可以是几个有量纲量通过乘除组合而成(如压力系数 $C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2}$)。

二. 量纲和谐原理

- 正确反映客观物理规律的函数关系式或方程式, 其各项的量纲指数都分别相同。
- 任何表示客观物理规律的数学关系式, 其数学形式不随单位制变换而改变形式。
- 客观物理规律必定可以通过无量纲量之间的关系式来表达。

三. Π 定理

- 物理过程涉及 n 个物理量, 其中有 m 个物理量的量纲是互相独立的, 选这些量纲为基本量纲, 可组成 $n-m$ 个无量纲量, 物理过程则可由这 $n-m$ 个无量纲量的关系式描述。否则就违反了量纲和谐原理。
- 物理过程的有量纲表达式为 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, 其中 m 个物理量的量纲被选为基本量纲, 余下 $n-m$ 个物理量可各自与这 m 个物理量组合成无量纲量 $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-m}$, Π 定理的结论是: 物理过程的无量纲表达式为 $F(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-m}) = 0$ 。
- 从无量纲表达看, 似乎物理过程涉及的因素减少了, 其实涉及的物理量并未减少, 只是这些物理量组合成了若干无量纲量相互关联。比起有量纲表达来, 无量纲表达更接近于相关物理量之间规律性联系的实质, 也更具普遍性。
- 应用 Π 定理的要点(也是难点)在于: 确定物理过程涉及的物理量时, 既不能遗漏,

也不要多列。

§ 7—2 相似理论

本节在量纲分析基础上, 讨论两个规模不同的不可压流体流动的相似问题。这是进行有关流体力学模型试验时必须面对的问题。

一. 流动相似概念

- 几何相似: 流场几何形状相似, 相应长度成比例, 相应角度相等。几何相似还可认为包括流场相应边界性质相同, 如固体壁面, 自由液面等。
- 运动相似: 在对应瞬时, 流场速度图相似, 即相应点速度大小成比例, 方向相同。
- 动力相似: 在对应瞬时, 流场中各种成分的力(时变惯性力、位变惯性力、质量力、压差力和粘性力) 矢量图都相似, 即相应点力的大小成比例, 方向相同。并且五种成分力的相似比例数也相同, 即力多边形相似。
- 在两个相似流动中, 对应的无量纲量是相同的。

二. 相似准则

- 不可压流体的流动都受 N-S 方程的控制, 那么我们怎样来保证两个不同规模的流动是相似的呢? 两个相似的不可压流体流动的无量纲解应是相等的, 这意味着控制流动的无量纲方程和无量纲边界条件和初始条件应是完全一样的。
- 用流动的时间、长度、流速和压强特征量 T, L, U, P , 将方程的自变量 (x, y, z, t) 和应变量 $(\bar{u}, p)$ 无量纲化: $t = T\tilde{t}$, $(x, y, z) = (L\tilde{x}, L\tilde{y}, L\tilde{z})$, $\bar{u} = U\tilde{u}$, $p = P\tilde{p}$ 使带 ‘ $\sim$ ’ 的量成为无量纲量。将它们代入连续方程 $\nabla \cdot \bar{u} = 0$ 和 N-S 方程 $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} = -g\bar{k} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \bar{u}$, 得到无量纲方程 $\tilde{\nabla} \cdot \tilde{u} = 0$ 和 $\frac{U}{T} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \frac{U^2}{L} (\tilde{u} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{u} = -g\bar{k} - \frac{P}{\rho L} \tilde{\nabla} \tilde{p} + \frac{\nu U}{L^2} \tilde{\nabla}^2 \tilde{u}$, 其中 $\tilde{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \bar{k})$, 当然定解条件中还要包括在无量纲边界上的边界条件及在无量纲时间初值时的初始条件。接着再将无量纲 N-S 方程对流项前的系数归一, 得到 $\frac{L}{TU} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{u} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{u} = -\frac{gL}{U^2} \bar{k} - \frac{P}{\rho U^2} \tilde{\nabla} \tilde{p} + \frac{\nu}{LU} \tilde{\nabla}^2 \tilde{u}$ 。
- 相似流动的无量纲方程和边界条件、初始条件应该完全一样, 所以两个相似流动对应的 $\frac{L}{TU}, \frac{gL}{U^2}, \frac{P}{\rho U^2}, \frac{\nu}{LU}$ 必须相等。它们都是无量纲量, 分别反映了时变惯性力、重力、压差力和粘性力在流动的动力平衡中相对于位变惯性力的重要性。
- 根据上面得到的四个无量纲量(有的作了取倒数、开方等改形)得到流动的相似准数: $S_t \equiv \frac{UT}{L}$ (斯特劳哈尔数); $F_r \equiv \frac{U}{\sqrt{gL}}$ (弗劳德数); $E_n \equiv \frac{P}{\rho U^2}$ (欧拉数); $R_e \equiv \frac{UL}{\nu}$ (雷诺数)。它们分别是时变惯性力、重力、压差力、粘性力相似的准数。
- 流动的特征量 T, L, U, P 一般应取流动中容易测量到的、能显著体现流动特征, 或者对流动起到重要控制作用的量。如 T 取为周期性运动时的周期; L 取为绕流物体的特征长度或圆管直径; U 取为无穷远方来流速度; P 取为与无穷远方的压差等。这些特征量常取在边界处, 使相似准数中自然融进边界条件的相似。

三. 相似理论的应用

- 在相似的条件下进行实验：两个流动的相似，严格地要求四个相似准数都相同，称为完全相似。但客观实际却难于保证，如在 g 相同的条件下，为使原型的弗劳德数 F_{rp} 与模型的弗劳德数 F_{rm} 相等，原型和模型的特征长度和速度必须满足 $\frac{U_p}{U_m} = \sqrt{\frac{L_p}{L_m}}$ ，即速度比尺为长度比尺之开平方。又若 ν 相同，则为使原型的雷诺数 R_{ep} 与模型的雷诺数 R_{em} 相等，则 $\frac{U_p}{U_m} = \frac{L_m}{L_p}$ ，即速度比尺为长度比尺之倒数。可见两个相似条件是矛盾的，除非改变 g 和 ν 。而我们知道改变 g 是不大可能的（由此可知在航天飞机上做实验的优越性），改变 ν 的可能性也不大，因为流体力学实验可供选择的流体种类是很少的。通常我们只能抓主要矛盾，保证起决定作用的那个相似准数相等，称为部分相似。
- 在实验中应该测量包含在实验结果无量纲表达式中的所有物理量。
- 实验结果应整理成以相似准数和其它无量纲量来表示的函数关系式或绘制成曲线，这样就可以换算到原型中去了。
- 实验结果只能应用于相似现象之间。